

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

12. Band, Heft 1 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 1—48

## Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Tarski, Alfred:** Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe. *Erkenntnis* 5, 80—100 (1935).

Der erste Teil beschäftigt sich mit dem von Padoa [C. R. du 2-e Congr. Int. d. Math. 1902 und Enseignement Math. 5 (1903)] in speziellen Fällen betrachteten Problem der gegenseitigen Unabhängigkeit (Nichtdefinierbarkeit) der spezifischen Zeichen einer Theorie.  $\psi(a, b', b'', \dots, c', c'', \dots)$  sei die Axiomenkonjunktion einer deduktiven Theorie (es wird dabei eine unverzweigte Typentheorie zugrunde gelegt),  $a, b', b'', \dots, c', c'', \dots$  die darin auftretenden spezifischen Zeichen (außerlogischen Konstanten). Betrachtet man  $a$  als mit Hilfe von  $b', b'', \dots$  definierbar, wenn ein Satz der Gestalt  $(x): x = a \equiv \cdot \psi(x, b', b'', \dots)$  beweisbar ist, so ist die Beweisbarkeit von

$$(x): x = a \equiv \cdot (\exists z', z'', \dots) \cdot \psi(x, b', b'', \dots, z', z'', \dots)$$

notwendig und hinreichend für die Definierbarkeit des Zeichens  $a$  mit Hilfe der Zeichen  $b', b'', \dots$ . — Im Mittelpunkt des zweiten Teils steht die Vollständigkeit in bezug auf die spezifischen Zeichen. Eine Satzmenge  $X$  wird vollständig in bezug auf ihre spezifischen Zeichen genannt, wenn sich keine kategorische Satzmenge  $Y$  angeben läßt, die  $X$  umfaßt und in der spezifische Zeichen auftreten, welche nicht auf Grund von  $Y$  mit Hilfe der in  $X$  auftretenden Zeichen definiert werden können. Bei etwas engerer Fassung des Isomorphiebegriffs als üblich gilt der Satz: Eine monotransformable Satzmenge (das ist eine solche, deren Interpretationen keinen nicht-identischen Automorphismus zulassen) ist in bezug auf ihre spezifischen Zeichen vollständig. Der Beweis (der Autor versichert, daß sich die Beweisskizze einwandfrei logistisch präzisieren lasse) benutzt den angegebenen Satz über die Definierbarkeit. Ob die Umkehrung gilt, ist noch unentschieden. — In Anwendung des genannten Satzes schließt die Arbeit mit einer Betrachtung betreffs der Aussichten einer kategorischen deduktiven Begründung der Physik ab. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Huntington, Edward V.:** The inter-deducibility of the new Hilbert-Bernays theory and Principia mathematica. *Ann. of Math.*, II. s. 36, 313—324 (1935).

Part I und II sind dem detaillierten Nachweis der Äquivalenz des Hilbert-Bernays'schen Axiomensystems für den Aussagenkalkül (Grundlagen d. Math. 1, 66) mit dem Whitehead-Russellschen System der Axiome und Definitionen des Aussagenkalküls (Principia Math. 1) gewidmet. In Part III wird das zugehörige Schlußschema (rule of inference) formal mit den Axiomen in eine Reihe gestellt, indem bei Zugrundelegung der Klasse  $K$  aller Aussagen und der Teilklasse  $T$  der „akzeptierten“ Aussagen sowohl die Axiome als auch das Schlußschema als Festsetzungen über die Zugehörigkeit von  $K$ -Elementen zu  $T$  interpretiert werden. In dieser Auffassung des Aussagenkalküls beweisen die Bernays'schen Unabhängigkeitsmodelle für die einzelnen Axiome des Hilbert-Bernays'schen Axiomensystems (a. a. O. S. 72—79) naturgemäß die betreffenden Unabhängigkeiten von den übrigen Axiomen und dem Schlußschema. Der Autor zeigt (an zwei Modellen) die Unabhängigkeit des Schlußschemas von den Hilbert-Bernays'schen Axiomen. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Webb, Donald L.:** Generation of any  $N$ -valued logic by one binary operation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 21, 252—254 (1935).

The author's result may be stated as follows: let  $p$  and  $q$  be variables capable of taking on the values  $0, 1, 2, \dots, n-1$ ; let  $F(p, q)$  be any function assigning to each pair of values of  $p$  and  $q$  another value in the same range; then  $F(p, q)$  can



be constructed by iteration and substitution out of the single function  $p|q$ , where  $p|p \equiv p + 1 \pmod{n}$ ,  $p|q = 0$ , for  $p \neq q$ . The author also shows that the same base function suffices to generate any function of a finite number of such variables. This is a generalization of a result of Sheffer (Trans. Amer. Math. Soc. 1913) concerning the ordinary algebra of propositions. *H. B. Curry* (State College, Penna.).

**Péter, Rózsa:** Zur Theorie der rekursiven Funktionen. Mat. fiz. Lap. 42, 25—46 u. dtsch. Zusammenfassung 46—49 (1935) [Ungarisch].

This is a revision of the author's previous paper, „Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen“, Math. Ann. 110, 612—632 (see this Zbl. 10, 241). The essential novelty is a much simpler proof of the reducibility of the „eingeschachtelte Rekursion“. This simpler proof is explained in the German summary; the explanation is quite adequate for a reader familiar with the German paper. The rest of the paper differs from the corresponding portions of the German paper in certain details, but not in essentials. *H. B. Curry* (State College, Penna.).

**Destouches, Jean-Louis:** Définition de la stabilité des propositions. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 182—184 (1935).

Die Bouligandsche Definition [Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21 (1935); dies. Zbl. 11, 98; auch C. R. Acad. Sci., Paris 200 (1935); dies. Zbl. 11, 242] wird unter Zuhilfenahme eines abstrakten Raumes neu formuliert und präzisiert. *W. Feller*.

● **Scholz, Heinrich:** Erforschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Leipzig: Felix Meiner 1935.

**Vogt, Eckhart:** Kausalität und Anschaulichkeit im Weltbild der heutigen Physik. S.-B. Ges. Naturwiss. Marburg 69, 195—221 (1935).

**Jørgensen, Jørgen:** Hauptzüge der gegenwärtigen Philosophie der Physik. Scientia 58, 81—91 (1935).

**Frank, Philipp:** Positivistische oder metaphysische Auffassung der Physik? Scientia 58, 1—9 (1935).

## Algebra und Zahlentheorie.

**Wigodsky, M.:** Sur une application du procédé des diagonales aux problèmes combinatoires. Rec. math. Moscou 42, Nr 1, 19—22 u. franz. Zusammenfassung 22 (1935) [Russisch].

Die Anzahl der  $k$ -tupel  $\alpha$  aus  $1, 2, \dots, n$ , für die die (zyklisch gerechnete) Differenz je zweier Elemente von  $\alpha$  größer als  $s$  ist, beträgt  $\frac{n}{k} \binom{n - ks - 1}{k - 1}$ , wie nach Festhaltung eines Elementes von  $\alpha$  (auch ohne Diagonalverfahren) leicht einzusehen ist. *Th. Motzkin* (Jerusalem).

**Devisme, Jacques:** Sur une famille de polynomes. (58. sess., Rabat, 28.—30. III. 1934.) Assoc. Franç. Avancement Sci., 41 (1934).

**Narasimha Iyengar, M. N.:** On the nature of the roots of certain equations. Math. Student 3, 19—22 (1935).

Ist  $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x}{n!}$ , so hat das Polynom  $F(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$  nur eine reelle Nullstelle, falls  $n$  eine ungerade Zahl ist. Diese Nullstelle liegt im Intervall  $(-1, -\frac{1}{2})$ . Ist  $n=2$  oder  $n=4$ , so hat  $F(x)$  keine reelle Nullstelle. Ist aber  $n(\geq 6)$  eine gerade Zahl, so hat  $F(x)$  zwei reelle Nullstellen, und zwar eine im Intervall  $(-2, -1)$  und eine im Intervall  $(\alpha, -2)$ , wo  $\alpha$  die einzige reelle Nullstelle von  $f'(x)$  bedeutet. *Sz. Nagy* (Szeged).

**Sicardi, Francesco:** Caratterizzazione geometrica di un particolare legame fra due sistemi lineari di forme. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 68, 425—432 (1935).

In einem projektiven  $r$ -dimensionalen Raume  $S_r$  sollen zwei lineare Systeme  $\Phi, \Psi$  von Formen

$$\varphi_0, \dots, \varphi_h; \quad \psi_0, \dots, \psi_k \quad (h + k = r)$$

die Determinante vom Range  $c$

$$D \equiv \begin{vmatrix} 0, & 0, \dots, 0, & \varphi_0, & \dots, & \varphi_h \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_0} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial x_r}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_r}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_r} \end{vmatrix}$$

identisch annullieren. Dann bilden sich die Punkte von  $S_r$  auf die Punkte

$$z_1 = \frac{\psi_0}{\psi_k}, \dots, z_k = \frac{\psi_{k-1}}{\psi_k}, z_{k+1} = \frac{\varphi_0}{\varphi_h}, \dots, z_r = \frac{\varphi_{h-1}}{\varphi_h}$$

einer  $(c-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit eines Hilfsraumes  $S'_r(z_1, \dots, z_r)$  ab. Umgekehrt lassen sich daraus n. u. h. Bedingungen dafür ausfindig machen, daß zwei gegebene lineare Systeme  $\Phi, \Psi$  die Determinante  $D$  identisch annullieren.

*Hlavatý (Praha).*

**Terracini, A.: Sul criterio di Plücker-Clebsch.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 651—655 (1935).

Durch eine Modifikation des Beweises von Severi [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17 (1933); dies. Zbl. 6, 244] wird folgende Verallgemeinerung des Prinzips von Plücker-Clebsch bewiesen: Wenn ein System von  $r$  Gleichungen  $f_r(x_1, \dots, x_r; \lambda_1, \dots, \lambda_r) = 0$  ( $r = 1, 2, \dots, r$ ) für spezielle Werte der Parameter  $\lambda$  eine isolierte Lösung besitzt, die nicht auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit  $V$  des Raumes  $\Sigma_r$  liegt, so hat für allgemeine Werte der  $\lambda$  das Gleichungssystem mindestens eine Lösung, die nicht auf  $V$  liegt.

*van der Waerden (Leipzig).*

**Weitzenböck, R.: Über einen Satz von Deruyts.** Compositio Math. 2, 224—229 (1935).

Verf. benutzt die invariantentheoretische Symbolik. Er beweist zunächst die invariantenerzeugende Eigenschaft des  $\Omega$ -Prozesses, dann den Satz von Gram über Formen, deren Koeffizienten durch ein projektiv-invariantes System ganzer rationaler Relationen verbunden sind. Invarianten letzterer Formen nennt er mit Weyl (dies. Zbl. 4, 243) „gebunden“ zum Unterschiede von den „freien“. Das projektiv-invariante System definiert im Koeffizientenraum  $R$  eine Mannigfaltigkeit  $M$  als Schnitt von Hyperflächen. Bedeuten  $P$  bzw.  $\bar{P}$  Invarianten der ursprünglichen bzw. transformierten Formen,  $\Delta$  die Transform.-Determinante, so verschwindet  $\bar{P} - \Delta^* P$  identisch in  $R$  bzw. nur auf  $M$ , je nachdem  $P$  frei oder gebunden ist. Mittels des Hilbertschen Basisatzes, angewandt auf alle Polynome, die auf  $M$  identisch verschwinden, ergibt sich sofort der Satz von Deruyts: „Jede gebundene proj. Invariante fällt auf  $M$  mit einer freien Invariante zusammen.“ — Bei geb. Invarianten gilt nicht mehr wie bei freien, daß mit  $P = P_1 P_2$  auch  $P_1$  und  $P_2$  Invarianten sind. Der Endlichkeitsatz hingegen besteht auch für geb. Invarianten, wenn man sich auf  $M$  beschränkt. — An einem Beispiel einer Seminvariante einer binären Form wird gezeigt, daß der Satz von Deruyts nicht für Invarianten aller linearen Gruppen gilt.

*Bodewig (Basel).*

**Wijk, U. H. van: Herleitung der tetragonometrischen Formeln aus einem vollen System von Bewegungsinvarianten von vier ternären Linearformen.** Nieuw Arch. Wiskde 18, 77—88 (1935) [Holländisch].

Vier Punkte haben 25 Bewegungsinvarianten, zwischen denen 7 Typen von Identitäten bestehen. Die geometrische Deutung dieser Identitäten ergibt Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines vollständigen Vierecks. *van der Waerden.*

**Blaton, J.: Quaternionen, Semivektoren und Spinoren.** Z. Physik 95, 337—354 (1935).

Die Theorie der Semivektoren und Spinoren wird von neuem aus der Darstellung der Lorentztransformationen durch Quaternionen entwickelt. *van der Waerden.*



**Cherubino, Salvatore:** Sul rango delle matrici pseudonulle. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 143—149 (1935).

Inequalities are derived among the order, rank and index of a nilpotent matrix and the ranks and indices of its powers. If  $A$  is of rank  $s \geq r$  and its  $r$ -th adjugate  $A^{(r)}$  is nilpotent (so that at least  $n - r + 1$  of its characteristic roots are 0), the index of  $A^{(r)}$  is  $\leq \binom{s}{r} + 1$ .

Mac Duffee (Columbus).

**Trump, P. L.:** On a reduction of a matrix by the group of matrices commutative with a given matrix. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 374—380 (1935).

This is an abridgment of a dissertation on file at the Library of the University of Wisconsin. Given three  $n \times n$  matrices  $C, D, A$  where  $C$  and  $D$  are commutative with  $A$ , the problem is to determine when  $C$  and  $D$  are similar under the group of non-singular matrices commutative with  $A$ , and to deduce canonical forms. The reduction is completed except for one case. The method is based upon an isomorphism between the most general matrix  $C$  commutative with a given canonical matrix  $A$  and a matrix having polynomial elements whose order is equal to the number of elementary divisors of  $A$ .

MacDuffee (Columbus).

**Williamson, J.:** The equivalence of non-singular pencils of hermitian matrices in an arbitrary field. Amer. J. Math. 57, 475—490 (1935).

Wenn  $\Omega = K(\sqrt{\alpha})$  quadratisch über dem Körper  $K$  mit der Charakteristik 0 ist und der Automorphismus von  $\Omega$  über  $K$  mit  $\beta \rightarrow \bar{\beta}$  bezeichnet wird, so soll  $A - \lambda B = (a_{ik}) - \lambda(b_{ik})$  ( $1 \leq i, k \leq n$ ) eine Schar hermitescher Formen in  $\Omega$  über  $K$  sein, wenn  $a_{ik}, b_{ik} \in \Omega$ ,  $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ ,  $b_{ki} = \bar{b}_{ik}$  und  $\lambda$  eine Unbestimmte über  $K$  ist. Wählt man alle  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$  aus  $K$  mit  $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$  und  $b_{ki} = \bar{b}_{ik}$ , so behandelt man zugleich die Scharen quadratischer Formen in  $K$ .  $A - \lambda B$  heißt mit  $C - \lambda D$  äquivalent ( $\sim$ ), wenn es eine Matrix  $V = (v_{ik})$ ,  $V' = (v_{ki})$ ,  $\bar{V}' = (\bar{v}_{ki})$ ,  $|V| \neq 0$  in  $\Omega$  bzw.  $K$  gibt, für welche  $A - \lambda B = \bar{V}'(C - \lambda D)V$  bzw.  $V'(C - \lambda D)V$  gilt. Die Schar ist nicht ausgeartet, wenn  $|A - \lambda B| \neq 0$ ; sei etwa  $|B| \neq 0$ . Aus den Faktoren  $(p_i(\lambda))^{n_{ij}}$  der Elementarteiler von  $A - \lambda B$  ( $p_i(\lambda)$  in  $K$  irreduzibel vom Grad  $n_i$ ) findet man zwei Matrizen  $M$  und  $Q$  über  $K$  mit  $(A - \lambda B) \sim QS(M - \lambda E)$  ( $E = (\delta_{ik})$ ,  $SM = MS$ ). Die genaue Potenz  $(p_i(\lambda))^{n_{ij}}$  komme in  $v_i^{(n)}$  Elementarteilern vor.  $p_i$  sei eine  $n_i$ -reihige Matrix über  $K$  mit dem charakteristischen Polynom  $p_i(\lambda)$ . Man kann durch hermitesche bzw. kogrediente Transformationen erreichen, daß  $S = \text{Diagonalkasten-Matrix}$   $[..S_i..]$ ,  $S_i = [..S_i^{(n)}..]$ ,  $S_i^{(n)} = [..S_{ij}^{(n)}..]$  ( $v_i^{(n)}$ -reihig) und  $S_{ij} = [g_{ij}, \dots, g_{ij}]$  ( $\eta_{ij}$ -reihig), worin die  $g_{ij}$  Polynome  $g_{ij}(p_i)$  in der Matrix  $p_i$  mit Koeffizienten aus  $K$  sind. Ist  $\theta_i$  eine Wurzel von  $p_i(\lambda) = 0$ , so ordnet man den  $S_i^{(n)}$  die  $v_i^{(n)}$ -reihige Diagonalmatrix  $[..g_{ij}(\theta_i)..]$  zu. Zwei Formenscharen sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Elementarteiler (also auch  $M$  und  $Q$ ) übereinstimmen und die diesen kanonischen Formen  $S_i^{(n)}$  zugeordneten Formen  $\sum g_{ij}(\theta_i) x_j \bar{x}_j$  in  $\Omega \cdot K(\theta_i)$  bzw.  $K(\theta_i)$  (mit  $\bar{x}_j = x_j$ ) für alle  $(i, \eta)$  äquivalent sind. Wenn  $\Omega \subset K(\theta_i)$ , so besteht dort für hermitesche Formen keine Bedingung. — Hierin sind die bekannten Sätze über spezielle hermitesche Formenscharen aus dem Körper der komplexen Zahlen und über die Scharen reeller quadratischer Formen natürlich als Spezialfälle enthalten.

W. Landherr (Hamburg).

**Whitney, Hassler:** On the abstract properties of linear dependence. Amer. J. Math. 57, 509—533 (1935).

Die folgenden Wege, eine endliche Menge zu einem „Matroid“ zu machen, werden als gleichwertig erwiesen: 1. Weg: Axiomatischer Grundbegriff: Rang  $r(N)$  der Teilmenge  $N$  von  $M$ ; Axiome: der Rang der leeren Menge ist 0; ist  $N \subseteq M$ ,  $x$  ein Element aus  $M$ , so ist  $r(N) \leq r(N+x) \leq r(N) + 1$ ; ist  $N \subseteq M$  und sind  $x$  und  $y$  zwei nicht in  $N$  enthal-



tene Elemente aus  $M$ , so folgt aus  $r(N+x)=r(N+y)=r(N)$  auch  $r(N+x+y)=r(N)$ . Abgeleitete Begriffe: Verschwindungsgrad  $n(N)$  der Teilmenge  $N$  von  $M$  ist Elementenzahl von  $N$ , vermindert um den Rang von  $N$ ; Teilmengen  $N$  mit  $n(N)=0$  sind unabhängig, die anderen abhängig; Basis ist eine maximale unabhängige Menge und Circuit eine abhängige Teilmenge von  $M$  ohne echte abhängige Teilmengen. — 2. Weg: axiomatischer Grundbegriff: unabhängige Teilmenge. Axiome: jede Teilmenge einer unabhängigen Menge ist unabhängig; sind die  $k$ -elementige Menge  $N$  und die  $(k+1)$ -elementige Menge  $N'$  beide unabhängig, so gibt es ein nicht zu  $N$  gehöriges Element  $x$  in  $N'$ , so daß  $N+x$  unabhängig ist. Abgeleiteter Begriff: Rang der Teilmenge  $N$  von  $M$  ist die Elementenzahl einer größten unabhängigen Teilmenge von  $N$ . — 3. Weg: Axiomatischer Grundbegriff: Basis. Axiome: keine echte Teilmenge einer Basis ist eine Basis; sind  $B$  und  $B'$  Basen,  $x$  in  $B$ , so gibt es ein  $x'$  in  $B'$ , so daß  $B-x+x'$  eine Basis ist. Abgeleiteter Begriff: unabhängig ist jede Teilmenge einer Basis. — 4. Weg: Axiomatischer Grundbegriff: Circuit. Axiome: keine echte Teilmenge eines Circuit ist ein Circuit; haben die Circuits  $C$  und  $D$  das Element  $x$  gemein, so ist  $C+D-x$  Vereinigung einer Menge von Circuits. Abgeleiteter Begriff: Rang der leeren Menge ist Null; Rang von  $N+x$  ist = Rang von  $N$ , wenn es einen  $x$  enthaltenden Circuit in  $N+x$  gibt, sonst  $=1 + \text{Rang von } N$ . — Das Matroid  $M$  heißt separabel, wenn es zwei nicht leere, elementfremde Teilmengen  $M'$  und  $M''$  von  $M$  gibt, so daß  $M=M'+M''$  und  $r(M)=r(M')+r(M'')$  ist, sonst nichtseparabel. Jedes Matroid läßt sich auf eine und nur eine Weise in größte nichtseparable Teile, die Komponenten des Matroids, zerlegen. Ein Matroid ist dann und nur dann ein Circuit, wenn es nichtseparabel ist und den Verschwindungsgrad 1 hat. Zwei Elemente gehören dann und nur dann zu derselben Komponente des Matroids, wenn es einen beide enthaltenden Circuit gibt. — Die Matroide  $M$  und  $M'$  heißen dual, wenn es eine eindeutige Abbildung  $f$  der Elemente von  $M$  auf die von  $M'$  gibt, so daß  $r(M'-f(N))=r(M)-n(N)$  für jede Teilmenge  $N$  von  $M$  gilt. Zu jedem Matroid gibt es ein und im wesentlichen nur ein duales. Zwei Matroide sind dann und nur dann dual, wenn es eine eindeutige Abbildung des einen auf das andere gibt, bei der Basen in die Komplemente von Basen übergehen. Matroide sind dann und nur dann dual, wenn ihre Komponenten es sind. — Die Reihen einer Matrix stellen ein Matroid dar; aber nicht jedes Matroid kann in dieser Weise gewonnen werden. Es wird eine Charakterisierung der Matroide gegeben, die aus Matrizen mit Koeffizienten aus dem Primkörper der Charakteristik 2 gewonnen werden können. — Die Begriffsbildungen finden Anwendungen in (und stammen aus) der Graphentheorie. [Vgl. H. Whitney: Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 339–362 (1932); dies. Zbl. **4**, 131.]

Reinhold Baer (Manchester).

Ore, Oystein: On the foundation of abstract algebra. I. Ann. of Math., II. s. **36**, 406–437 (1935).

Der Zweck der Arbeit ist, verschiedene Theorien der abstrakten Algebra durch weitere Abstraktion der zugrunde gelegten Systeme auf eine gemeinsame Grundlage zu stellen. Als neuer Begriff wird die „Struktur“ eingeführt: ein System von Elementen  $A, B, \dots$ , in dem die Relationen des Enthaltenseins  $B < A$  (oder  $A > B$ ) mit den Eigenschaften  $A > A$ , aus  $A > B > C$  folgt  $A > C$ ; des Durchschnittes  $(A, B)$  mit den Eigenschaften  $(A, B) \leq A$ ,  $(A, B) \leq B$ , aus  $C < A$ ,  $C < B$  folgt  $C < (A, B)$ ; und des Kompositums  $[A, B]$  mit den Eigenschaften  $A \leq [A, B]$ ,  $B \leq [A, B]$ , aus  $A < C$ ,  $B < C$  folgt  $[A, B] < C$  gegeben sind. Gilt für irgend zwei Elemente  $A, B$  der Struktur entweder  $A < B$ ,  $A = B$  oder  $A > B$ , so heißt sie eine Kette. Die algebraisch bedeutsamen Strukturen erhält man durch Hinzufügung weiterer Axiome. Zunächst sind da gewisse Endlichkeitsaxiome: Endl.-Bedingung für fallende Ketten: Eine Folge  $A = A_0 > A_1 > A_2 \dots$  von Elementen der Struktur, die alle ein Element  $B$  enthalten:  $B < A_i$ , hat nur endlich viele Elemente; Endl.-Bedingung für steigende Ketten: Ist  $B = B_0 < B_1 < B_2 < \dots < A$ , so ist die Anzahl der  $B_i$  endlich. Andere Axiome haben die Bedeutung der Einführung gewisser Relationen. Dedekindsches Axiom: Aus  $C \geq \bar{C}$ ,  $(C, D) = (\bar{C}, D)$ ,  $[C, D] = [\bar{C}, D]$  folgt  $C = \bar{C}$ . Stärker einschränkend: Aus  $(C, D) = (\bar{C}, D)$  und  $[C, D] = [\bar{C}, D]$  folgt  $C = \bar{C}$  (arithmetisches Axiom). Beide Axiome können auf viele verschiedene Weisen ausgedrückt werden, z. B. kann das Dedekindsche Axiom in die Form gebracht werden: Ist  $A < C < [A, B]$ , so ist  $C = [A, (B, C)]$  oder auch



$[(A, [B, C]), (B, C)] = ([A, (B, C)], [B, C])$  für irgend drei  $A, B, C$  („duale“ Form). — In nahe-  
liegender Analogie zu Begriffen der Gruppentheorie werden Homomorphismus und Isomor-  
phismus in Beziehung auf Kompositum oder Durchschnitt oder beide (Homom. bzw. Isom.  
schlechthin) erklärt. Beide Arten von Homomorphismen erhalten die  $(<, >)$ -Beziehungen. —  
Teilstruktur zwischen  $A$  und  $B$  einer Struktur heißt die Gesamtheit aller  $C$  der Struk-  
tur, für die  $A \leq C \leq B$  bzw.  $A \geq C \geq B$  gilt, sie wird mit  $B/A$  bzw.  $A/B$  bezeichnet.  
Für Dedekindsche Struktur gilt der Satz: Es ist  $A/(A, B)$  isomorph (schlechthin) zu  $[A, B]/B$   
für irgend zwei Elemente  $A, B$  der Struktur. Man sieht, daß die Theorie der Dedekindschen  
Strukturen eine Axiomatisierung der Schlußweise des Jordan-Hölderschen Satzes bezweckt.  
Eine weitere wichtige Begriffsbildung ist die der Quotientenstrukturen. Es bezeichne  
jetzt  $A/B$  nicht mehr die Struktur aller Elemente der gegebenen Struktur zwischen  $A$  und  $B$ ,  
sondern lediglich ein Symbol, das für irgend zwei  $A, B$  mit  $A \geq B$  aus der gegebenen Struktur  
gebildet wird. Die Menge dieser „Quotienten“ wird zu einer Struktur, indem  $A/B \geq A_1/B_1$   
gesetzt wird, wenn  $A \geq A_1$  und  $B \geq B_1$  ist, und indem Durchschnitt und Kompositum durch

$$(A/B, A_1/B_1) = (A, A_1)/(B, B_1)$$

$$[A/B, A_1/B_1] = [A, A_1]/[B, B_1]$$

erklärt werden. In den meisten wichtigen Strukturen gibt es ein Einselement  $E_0$  mit der  
Eigenschaft  $(A, E_0) = E_0$  für alle  $A$  und ein Allelement  $O_0$  mit  $[A, O_0] = O_0$  für alle  $A$ .  
Hat eine Struktur ein Einselement  $E_0$ , so ist in der zugehörigen Quotientenstruktur die mit  
der ursprünglichen isomorphe Teilstruktur aller  $A/E_0$  enthalten. Endlichkeitsbedingungen  
und Dedekindsches Axiom übertragen sich unmittelbar von einer Struktur auf die Quo-  
tientenstruktur. Ein Element  $A$  heißt prim über  $B$ , wenn  $A > B$  ist, aber kein Element  
zwischen  $A$  und  $B$  existiert. Ein Quotient  $\mathfrak{A} = A/B$  ist prim über  $\mathfrak{B} = C/D$ , wenn ent-  
weder  $A$  prim ist über  $C$  und  $B = D$  oder  $A = C$  und  $B$  prim über  $D$ . Die Quotienten  $A/A$   
heißen Einsquotienten. Zwei Quotienten  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  heißen relativ prim, wenn  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  ein  
Einsquotient ist. Durch  $A/B \times B/C = A/C$  wird für gewisse Quotientenpaare ein Produkt  
erklärt, je zwei der vorkommenden Quotienten bestimmen den dritten eindeutig, es ist  
daher auch sinnvoll, statt  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$   $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1} \times \mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{B}^{-1}$  zu schreiben. Nun  
wird durch  $\mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}] \times \mathfrak{C}^{-1} = [A, C]/C$  für zwei Quotienten  $\mathfrak{A} = A/B$  und  $\mathfrak{C} = C/B$   
mit dem gleichen Nenner die Transformierte von  $\mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{C}$  erklärt. Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{C}$  relativ  
prim, so heißt  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1}$  ähnlich zu  $\mathfrak{A}$ . Man kann nun den Umstand, daß zu zwei Elementen  
 $A, B$  einer Dedekindschen Struktur eine Kette  $A > A_1 > A_2 > \dots > A_r = B$  finden läßt,  
wo  $A_i$  über  $A_{i+1}$  prim ist, auch so ausdrücken, daß der Quotient  $A/B$  als Produkt von  $r$  primen  
Quotienten geschrieben werden kann

$$A/B = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_r.$$

Es gilt dann der Jordan-Höldersche Satz, daß jede andere solche Produktdarstellung gleich viel  
Primfaktoren hat, die in passender Ordnung mit den Faktoren der ersten Zerlegung ähnlich  
sind. Allgemeiner gilt das Analogon eines Satzes von Schreier, daß sich in einer Dedekind-  
schen Struktur zwei gleiche Produkte

$$\mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_r = \mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_s$$

durch weitere Zerlegung der einzelnen Faktoren so verfeinert werden können, daß auf beiden  
Seiten gleich viel Faktoren stehen, die bei passender Ordnung paarweise ähnlich sind.

Deuring (Leipzig).

**Dantzig, D. van:** Zur topologischen Algebra. II. Abstrakte  $b_i$ -adische Ringe. Com-  
positio Math. 2, 201—223 (1935).

Ist  $R$  ein Ring,  $b_i$  eine abnehmende Folge zweiseitiger Ideale in  $R$ , deren Durch-  
schnitt  $0$  ist, so wird  $R$  zu einem topologischen Ring, wenn man die Restklassen  
von  $R$  nach den  $b_i$  zu Umgebungen ihrer Elemente erklärt. Dieser topologische Ring  
kann perfekt gemacht (komplettiert) werden, und das Ergebnis hiervon ist der  $b_i$ -adische  
Ring  $R(b_i)$  über  $R$ .  $R(b_i)$  ist nulldimensional.  $R(b_i)$  ist stetiges und homomorphes  
Bild von  $R(c_i)$ , wenn es eine wachsende unendliche Folge  $k_i$  gibt, so daß  $c_{k_i}$  in  $b_i$   
enthalten ist;  $R(b_i)$  ist topologisches und isomorphes Bild von  $R(c_i)$ , wenn es eine  
wachsende unendliche Folge  $k_i$  und eine wachsende unendliche Folge  $m_i$  gibt, so daß  $c_{k_i}$   
in  $b_i$  und  $b_{m_i}$  in  $c_i$  enthalten ist. — Ist in jedem Ideal  $a \neq 0$  aus  $R$  ein  $b_i$  enthalten,  
so heißt  $R(b_i)$  universell; ist die Menge der Ideale in  $R$  abzählbar und für diese Ideal-  
menge eine gewisse „Endlichkeitsbedingung“ erfüllt, so existiert ein universeller Ring  
über  $R$ , und jeder  $b_i$ -adische Ring über  $R$  ist homomorphes und stetiges Bild des uni-  
versellen Rings über  $R$ . — Ein topologischer Ring ist Cantorsch, wenn er topologisches  
Bild der Cantorschen nirgends dichten perfekten Menge oder endlich ist; ein topo-  
logischer Ring ist dann und nur dann Cantorsch, wenn er  $b_i$ -adisch ist und alle Rest-



klassenringe  $\text{mod } b_i$  endlich sind. — Die  $n$ -reihigen Matrizen mit Koeffizienten aus einem  $b_i$ -adischen Ring bilden einen ebensolchen Ring, der gleichzeitig mit jenem Cantorsch ist. — Der  $b_i$ -adische Ring  $R(b_i)$  heißt primitiv, wenn die  $b_i$  zum gleichen Primideal  $p$  gehörige Primär Ideale sind; ist  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins, sind die  $b_i$  je Durchschnitt von endlich vielen, paarweise teilerfremden größten Primärkomponenten, so ist  $R(b_i)$  direkte Summe von (endlich oder unendlich vielen) primitiven Ringen; diese direkten Summanden sind mit  $R$  Cantorsch. Sind die Elemente  $e_r$ , die Einheiten dieser direkten Summanden, so ist das Element  $x$  aus  $R(b_i)$  Summe der Elemente  $x e_r$  und Produkt der Elemente  $1 - e_r + x e_r$ ; entsprechend gehört dann zu jedem Ideal eine additive und eine multiplikative Zerlegung, und die additiven und multiplikativen Komponenten der Ideale, die zu demselben direkten Summanden gehören, bilden isomorphe Idealkörper. — Der  $b_i$ -adische Ring  $R(b_i)$  heißt  $p$ -adisch, wenn  $b_i = p^i$ ,  $p$  ein teilerloses Primideal ist, die  $b_i$  eine Kompositionsreihe bilden und die obigen Annahmen erfüllt sind. Sind alle  $p^i \neq 0$ , so gibt es keine Nullteiler, und jedes Ideal ist Hauptideal; gibt es umgekehrt in dem (die obigen Annahmen erfüllenden)  $b_i$ -adischen Ring keine Nullteiler und ist jedes Ideal Hauptideal, so ist er entweder ein Körper oder ein  $p$ -adischer Ring. [Vgl. D. van Dantzig, Math. Ann. 107, 587—626 (1932); dies. Zbl. 6, 7.] Reinhold Baer (Manchester).

Scorza, Gaetano: Sopra una classe di algebre pseudonulle. Atti Accad. Sci. Torino 70, 196—211 (1935).

Frobenius hat bewiesen, daß eine nilpotente Algebra  $A$  der Ordnung  $n$  über einem Körper  $\Gamma$  und mit dem Exponenten  $n+1$  (also  $A^{n+1} = A^n \cdot A = 0 \neq A^n$ ) kommutativ ist und von einem Element  $v$  mit  $v, v^2, \dots, v^n \neq 0 = v^{n+1}$  erzeugt wird. In dieser Arbeit wird angenommen: Exponent = Ordnung =  $n$ . Erster Hauptsatz: Wenn  $n > 3$ , so existieren stets Elemente vom Exponenten  $n$ ; die linear unabhängigen Potenzen  $v, \dots, v^{n-1}$  lassen sich durch ein  $v'$  mit  $v \cdot v' = 0, v'^2 = \alpha \cdot v^{n-1}, v'v = \beta v^{n-1}$  zu einer Basis der Algebra ergänzen; man kann entweder (I)  $\beta = 1$  oder (II)  $\beta = 0$  erreichen (II-Systeme sind demnach kommutativ) und behält in  $\alpha$  einen Parameter aus  $\Gamma$ . [Für  $n = 3$  gibt es noch ein Ausnahmesystem (III)  $u_1 u_2 = -u_2 u_1 = u_3, u_i u_k = 0$  sonst.] Sämtliche Elemente  $v$  vom Exponenten  $n$  sowie die jeweils dazu möglichen  $v'$  lassen sich angeben und man erhält den zweiten Hauptsatz:  $A_1$  und  $A_2$  sind isomorph genau, wenn  $\alpha$  im Falle (I):  $\alpha_1 = \alpha_2 \lambda^{n-3}$ ;  $\beta$ ) (II),  $n$  ungerade:  $\alpha_1 = \lambda^2 \alpha_2$ ;  $\gamma$ ) (II),  $n$  gerade:  $\alpha_1 = \lambda \alpha_2$  (also nur zwei Typen);  $\lambda$  ist eine Zahl  $\neq 0$  aus  $\Gamma$ . — Die Existenz (d. h. die Assoziativität) der Systeme wird durch Angabe entsprechender Matrizenringe bewiesen. Die Algebren sind direkt unzerlegbar, bis auf den Typus (II) bei  $\alpha = 0$ . Zorn (New Haven).

Silberstein, Ludwik: On complex primes. Philos. Mag., VII. s. 19, 1097—1107 (1935).

This paper is an account of a partial rediscovery of Gauss' results on the decomposition of rational primes into primes of the form  $x + iy$ . D. H. Lehmer.

Chevalley, C., und H. Nehr Korn: Sur les démonstrations arithmétiques dans la théorie du corps de classes. Math. Ann. 111, 364—371 (1935).

In einer früheren Arbeit des Ref. [Math. Ann. 107, 731 ff. (1935); dies. Zbl. 6, 152] war gezeigt, daß die Hauptsätze der Klassenkörpertheorie sich aus der fundamentalen Summenrelation

$$\sum_p \left( \frac{\mathfrak{A}}{p} \right) \equiv 0 \pmod{1}$$

für die  $p$ -Invarianten einer normalen einfachen Algebra  $\mathfrak{A}$  über einem algebraischen Zahlkörper  $k$  herleiten lassen. Diese Herleitung machte aber wesentlich von den transzendenten Methoden der Klassenkörpertheorie Gebrauch. Verff. zeigen hier, daß man diese Herleitung auf rein arithmetischem Wege vollziehen kann. — Die Arbeit des Ref. folgte zunächst rein arithmetisch die Tatsache, daß die zu einem zyklischen Körper  $K|k$  gehörige Artin Gruppe  $H_{K,k}$  (definiert durch  $\left( \frac{K|k}{a} \right) = 1$ ) eine Kongruenzgruppe nach



dem Führer  $f_{K,k}$  ist und somit die zugehörige Takagigruppe  $\overline{H}_{K,k}$  (definiert durch die Normen von  $K|k \bmod f_{K,k}$ ) enthält; Verff. verallgemeinern das leicht auf beliebig abelsche  $K|k$ . Um von hier aus zu den Hauptsätzen der Klassenkörpertheorie zu gelangen, sind folgende zwei Behauptungen zu beweisen: I.  $\left(\frac{K|k}{a}\right)$  durchläuft die volle Galoisgruppe von  $K|k$ . II.  $\overline{H}_{K,k} = H_{K,k}$ ; dies läuft auf Ind.,  $\overline{H}_{K,k} \leq \text{Grad } K|k$  hinaus. — Der arithmetische Beweis der Verff. für I. ergibt sich durch den Nachweis, daß für zyklische  $K|k$  von Primzahlgrad nicht alle oder auch nur fast alle Primideale von  $k$  in  $K$  voll zerlegt sein können. Diese Tatsache wird aus der arithmetischen Theorie der zyklischen Körper (fundamentale Ungleichung) gefolgert. Für den vorliegenden Zweck wird nur ein einfacherer Spezialfall der allgemeinen fundamentalen Ungleichung gebraucht. Verff. geben einen auf diesen Spezialfall zugeschnittenen Beweis. — Der arithmetische Beweis der Verff. für II. beruht auf der Möglichkeit, aus den bereits arithmetisch begründeten Tatsachen den Existenzsatz für Klassenkörper vom Exponenten bei  $n$ -ten Einheitswurzeln im Grundkörper arithmetisch herzuleiten. Dies geschieht nach dem Chevalley-Herbrandschen abzählenden Verfahren [J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 2, 365 (1933); dies. Zbl. 8, 53]. Vor diesem Existenzsatz aus gelangen Verff. zum Ziel durch arithmetischen Beweis des Übergangssatzes: Mit  $K|K'$  und  $K'|k$  ist auch  $K|k$  Klassenkörper und mit  $K|k$  auch  $K'|k$ , wenn  $K \geq K' \geq k$ . — Druckfehler: S. 367, Z. 23 lies  $(A) = a$  statt  $(A) = \mathfrak{A}$ . S. 370, Z. 6 lies  $e$  statt  $d$  der  $K$ . S. 370, Z. 13 lies  $(K': k)$  statt  $n$ .  
 Hasse (Göttingen).

**Krasner, Marc:** Sur la théorie de la ramification des idéaux. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1813—1815 (1935).

Verf. verallgemeinert den Begriff der Hilbertschen Untergruppenreihen, die zu Primidealen relativ galoisscher Körper gehören, auf beliebige algebraische Zahlkörper.  $K$  sei ein beliebiger algebraischer Körper über dem Körper  $\chi$ , der entweder selbst ein algebraischer Zahlkörper oder ein  $p$ -adischer Körper ist.  $K^*$  sei der galoissche Körper von  $K$ ,  $P^*$  ein Primideal von  $K^*$ , welches die rationale Primzahl  $p$  teilt,  $P$  das Primideal von  $K$ , welches  $P^*$  teilt,  $a$  die Ordnung von  $P^*$  in  $P$ ,  $\varrho$  eine Primitivwurzel mod  $P$  in  $K$ ,  $\pi$  eine ganze Zahl von  $K$ , welche durch genau die 1. Potenz von  $P$  teilbar ist. Unter der Zerlegungsmenge  $Z$  von  $P^*$  in  $K$  bezüglich  $\chi$  wird dann die Menge der Isomorphismen  $\sigma$  von  $K$  verstanden, für welche  $\sigma P \equiv 0(P^{*a})$ , unter der Trägheitsmenge  $T$  die Menge der Isomorphismen, für welche  $\varrho \equiv \varrho \sigma(P^*)$ , unter der Verzweigungsmenge  $V$  die Menge der Isomorphismen, für welche  $\sigma \pi \equiv \pi(P^{*a+1})$ . Ist  $\sigma \pi - \pi$  durch genau  $P^{*w+a}$  teilbar, so wird der Bruch  $w/a$  die charakteristische Zahl von  $\sigma$  in bezug auf  $P^*$  genannt. Sind  $0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n < \nu_{n+1} = \infty$  alle in  $V$  auftretenden charakteristischen Zahlen, so heißt  $\nu_k$  die  $k$ -te Verzweigungszahl von  $P^*$  in  $K$ , und diejenigen Isomorphismen, deren charakteristische Zahl  $\geq \nu_{k+1}$  ist, heißen die  $k$ -fach überstrichene Verzweigungsmenge  $\overline{V}^{(k)}$  von  $P^*$ .  $\nu_k$  und die Mächtigkeiten  $z, t, n_k$  von  $Z, T, \overline{V}^{(k)}$  hängen nur von  $P$  und nicht von  $P^*$  ab und stehen in analogem Zusammenhang mit der Zerlegung von  $p$  in  $K$  wie im galoisschen Fall. Verf. gibt einen Auszug über die Ergebnisse, die er auf Grund dieser Definitionen erzielte, insbesondere werden die Verzweigungsmengen und Zahlen eines Unterkörpers ausgehend vom Gesamtkörper behandelt. — Die Abhandlung enthält einige Druckfehler, u. a. ist Theorem VII versehentlich nicht aufgenommen. Taussky (Cambridge, England).

**Krasner, Marc:** Sur la théorie de la ramification des idéaux. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 114—117 (1935).

Es wird ein Auszug über weitere Ergebnisse in der Theorie der Verzweigung der Ideale beliebiger algebraischer Zahlkörper gegeben unter Zugrundelegung der vom Verf. früher (s. vorst. Ref.) angegebenen Definitionen. Insbesondere werden diejenigen Körper betrachtet, für welche die Verzweigungszahlen  $\nu_k$  ganz sind und entweder die Bedingungen 1.  $\nu_k \equiv \nu_{k-1}(d_{k-1})$ , ( $d_k = t/\nu_k$ ) oder die Bedingungen



2.  $\nu_k \equiv \nu_{k-1} (d_{k-1}/d_0)$  erfüllen. Im 1. Fall werden die Körper Hassesch, im 2. Fall semihassesch in bezug auf  $\chi$  genannt, in Verallgemeinerung des Satzes von Hasse, daß die Kongruenzen 1. für jeden galoisschen Körper mit abelschem  $T$  erfüllt sind (J. reine angew. Math. **162**, 169—184). Die Kongruenzen 2. sind stets erfüllt, wenn  $K$  galoissch und  $V$  zyklisch ist, wie Suguwara [Proc. Imp. Acad. Jap. **2**, 366—367 (1926)] zeigte. Verf. gibt an, daß jeder Unterkörper eines Hasseschen Körpers bzw. semihassesch Körper dieselbe Eigenschaft besitzt und daß ein Körper, welcher einen Hasseschen bzw. semihassesch Unterkörper besitzt, dessen sämtliche  $n_k/n_{k+1}$  kleiner als die entsprechenden Größen von  $K$  sind, selbst Hassesch bzw. semihassesch ist. Als Folgerung aus den beiden letzten Sätzen wird angegeben, daß ein galoisscher Körper  $K$ , bei welchem sämtliche  $n_k/n_{k+1}$  des zur Kommutatorgruppe von  $T$  bzw.  $V$  gehörigen Unterkörper kleiner sind als die entsprechenden Größen von  $K$ , Hassesch bzw. semihassesch ist. — Ein in bezug auf  $\chi$  Hassescher Körper wird absolut Hassesch genannt, wenn die Ordnung von  $P$  in bezug auf  $\chi$  ebenso groß ist wie die absolute Ordnung von  $P$ . Es werden die Eigenschaften der Verzweigungsmengen absolut Hassescher Körper und insbesondere galoisscher und schließlich abelscher absolut Hassescher Körper diskutiert. Ferner werden abelsche Erweiterungen über  $p$ -adischen Grundbereichen betrachtet.

Tausky (Cambridge, England).

**Gut, Max:** Über die Gradteilerzerlegung in gewissen relativ-ikosaedrischen Zahlkörpern. Comment. math. helv. **7**, 103—130 (1934).

Diese Arbeit ist die Fortsetzung zweier in den Comment. math. helv. **4**, 219—229 (1932), dies. Zbl. **5**, 51, und **6**, 47—75 (1933), dies. Zbl. **7**, 103, erschienener Arbeiten über die Primidealzerlegung in relativ-ikosaedrischen Körpern. Es wird hier die Zerlegung der Primteiler von 60 untersucht. Der Grundkörper  $k$  soll die 5-ten Einheitswurzeln enthalten (damit die Kleinsche Theorie der Ikosaedergleichungen angewendet werden kann), ferner wird vorausgesetzt, daß die Primteiler von 60 im Körper der 5-ten Einheitswurzeln in  $k$  unverzweigt bleiben, weil nämlich die Verzweigungsordnung dieser Primideale in  $k$  für die Zerlegung in  $K$  eine Rolle spielt. Zur Entscheidung darüber, wie die Primidealzerlegung eines Primideals  $p$  von  $k$  in  $K$  aussieht, genügt es nach der zweiten der zitierten Arbeiten, den Zerlegungstypus in einem Zwischenkörper  $k$  zu kennen, der zu einer Untergruppe der Ordnung 5 gehört. Hier werden aber auch noch andere Zwischenkörper herangezogen. Ferner muß die von Ore [Math. Ann. **96**, 84 (1928)] entwickelte Theorie der Newtonschen Polygone in Zahlkörpern herangezogen werden.

Deuring (Leipzig).

**Söhngen, Heinz:** Zur komplexen Multiplikation. Math. Ann. **111**, 302—328 (1935).

Nach den Methoden aus einer früheren Arbeit des Ref. [J. reine angew. Math. **157** 115 (1927)] werden folgende Verallgemeinerungen der dort hergeleiteten Tatsachen bewiesen: I. Sei  $\mathfrak{o}$  eine beliebige Ordnung eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers  $k$ ,  $Q$  ihr Führer und  $\mathfrak{m}$  ein ganzer Modul dieser Ordnung, ferner  $\mathfrak{s}$  die  $\mathfrak{o}$  zugeordnete Gruppe aller Zahlen aus  $k$ , die mod  $Q$  einer zu  $Q$  primen rationalen Zahl kongruent sind. Unter  $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$  sei verstanden, daß  $\alpha$  in  $\mathfrak{s}$  liegt,  $\alpha \mathfrak{o}$  prim zu  $\mathfrak{m}$  ist und  $(\alpha - 1)\mathfrak{o} = \frac{a}{b} \mathfrak{m}$  mit ganzen Moduln  $a, b$  und zu  $\mathfrak{m}$  primem  $b$  ist. Die regulären zu  $\mathfrak{m}$  primen Moduln der Ordnung  $\mathfrak{o}$  zerfallen in Klassen mod  $\mathfrak{m}$  nach der Hauptklasse  $H^*(\mathfrak{m})$  der  $\alpha \mathfrak{o}$  mit  $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ . Dem entspricht isomorph eine durch Multiplikation mit der Hauptordnung  $\mathfrak{o}_0$  entstehende Klasseneinteilung der zu  $Q\mathfrak{m}\mathfrak{o}_0$  primen Ideale von  $k$  nach der Hauptklasse  $H_0^*(\mathfrak{m})$  der  $\alpha \mathfrak{o}_0$  mit  $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ . Den Modulklassen  $\mathfrak{f}^* \pmod{\mathfrak{m}}$  lassen sich nun, ganz analog wie bei Ref. I. c. für die Hauptordnung  $\mathfrak{o}_0$ , Klasseninvarianten  $\tau(\mathfrak{f}^*) = \tau\left(\frac{\tau a}{\mathfrak{m}}; a\right) = \tau(Q\mathfrak{o}; a)$  zuordnen. Dann erweist sich  $k(j(\mathfrak{f}), \tau(\mathfrak{f}^*))$  als der Klassenkörper zu  $H_0(\mathfrak{m})$ . — II. Die genannten Klasseninvarianten sind gewisse

$$\tau\left(\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2}{m}; a_1, a_2\right),$$



wo  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $m$  die kleinste ganzrationale Zahl in  $\mathfrak{m}$  und  $(x_1, x_2, m) = 1$  ist. Für  $\mathfrak{o} < \mathfrak{o}_0$  braucht nicht umgekehrt jeder solche Teilwert eine der genannten Klasseninvarianten zu sein. Jedenfalls gehört aber jeder solche Teilwert zum Klassenkörper zu  $H_0^*(m\mathfrak{o})$ . [Eine genauere Festlegung der durch diese Teilwerte gelieferten Klassenkörper hat kürzlich W. Franz gegeben: J. reine angew. Math. **173**, 60ff. (1935); dies. Zbl. **11**, 101. Bem. d. Ref.] — III. Ist  $f(w_1, w_2)$  eine zur Hauptkongruenzgruppe  $n$ -ter Stufe gehörige ganze Modulfunktion, die in allen Spitzen des Fundamentalbereichs Entwicklungen nach  $q^n$  mit Koeffizienten aus dem Körper der  $n$ -ten Einheitswurzeln hat, so liegen die Werte von  $f$  für Moduln der Ordnung  $\mathfrak{o}$  aus  $k$  in dem Klassenkörper zu  $H_0^*(n\mathfrak{o})$ . Daraus folgt leicht auch eine entsprechende Aussage für Modulformen dieser Art. — IV. Ferner ergibt sich, daß keine feste Modulfunktion und auch kein endliches System dieser Art ausreicht, um die  $\tau$ -Funktion im Kroneckerschen Jugendtraum zu ersetzen. Hasse (Göttingen).

**Hecke, E.: Die eindeutige Bestimmung der Modulfunktionen  $q$ -ter Stufe durch algebraische Eigenschaften.** Math. Ann. **111**, 293—301 (1935).

Es wird bewiesen: Unter allen algebraischen Funktionenkörpern, welche eine zur binären Modulargruppe  $\mathfrak{M}(q)$  nach einem Primzahlmodul  $q$  isomorphe Gruppe von Automorphismen besitzen, gibt es nur einen einzigen vom Geschlecht

$$p(q) = 1 + \frac{\mu(q)(q-6)}{12q} \quad \left( \mu(q) = \frac{q(q^2-1)}{2} \right),$$

nämlich den Körper der Modulfunktionen  $q$ -ter Stufe, und überdies nur endlich viele mit kleinerem Geschlecht als  $p(q)$ . — Der Beweis beruht auf einer bereits von A. Hurwitz [Math. Ann. **41** (1893) = Werke I, 391] angegebenen Normalerzeugung für jeden Körper mit einer Automorphismengruppe  $\mathfrak{M}(q)$  und Geschlecht  $\leq p(q)$ , nämlich durch eine algebraische Funktion  $\varphi$ , die über dem Körper der rationalen Funktionen von  $z$  den Grad  $\mu(q)$  hat und nur über drei festen Stellen  $a, b, c$  der  $z$ -Ebene verzweigt ist, und zwar mit in  $\mu(q)$  aufgehenden Ordnungen  $k_a, k_b, k_c$ . In dem Hauptfalle, daß das Geschlecht  $= p(q)$  sein soll, ist notwendig noch  $k_a = 2, k_b = 3, k_c = q$ , und die Behauptung ergibt sich mittels des folgenden Hilfssatzes über die Modulargruppe  $\mathfrak{M}(q)$ : Sind  $A_2, A_3, A_q$  und  $B_2, B_3, B_q$  zwei Tripel von Erzeugenden von  $\mathfrak{M}(q)$  mit den durch die Indizes angegebenen Ordnungen und  $A_2 A_3 A_q = 1, B_2 B_3 B_q = 1$ , so gibt es einen Automorphismus von  $\mathfrak{M}(q)$ , bei dem das eine Tripel in das andere übergeht. Hasse.

### Zahlentheorie:

**Beeger, N. G. W. H.: On some numbers of the form  $6^k \cdot s \pm 1$ .** Ann. of Math., II. s. **36**, 373—375 (1935).

In 1909 Dines (Ann. of Math., II. s. **10**, 105) published the factorization of numbers of the form  $6^k \cdot s \pm 1$  for numerous values of  $k$  and  $s$ . The factorizations of 98 of these numbers were left in doubt. This paper completes the investigation of these 98 numbers which between  $10^8$  and  $6 \cdot 10^9$ . Only 14 of them are composite.

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

**Gupta, Hansraj: A generalisation of a theorem of Wolstenholme.** Math. Notes Nr **29**, XI—XIII (1935).

The author proves that

$$\left( n^2, \frac{12}{l} \right) \sum_{\substack{m=1 \\ (m, n)=1}}^n \frac{1}{m} \equiv 0 \pmod{n^2},$$

where  $1 \leq l \leq 4, l \equiv \varphi(N) \pmod{4}$ , where  $n = 2^n N, 2 \nmid N$ . See also this Zbl. **8**, 196 (Hardy and Wright) and **10**, 102 (Chowla).

Davenport (Cambridge).

**Erdős, P.: On the density of some sequences of numbers.** J. London Math. Soc. **10**, 120—125 (1935).

Let  $f(m)$  be a non-negative arithmetical function satisfying

$$(1) \quad f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad \text{if } (m_1, m_2) = 1, \quad (2) \quad f(p_1) \neq f(p_2)$$



for two different primes  $p_1, p_2$ ; and let

$$N(f; c, d) = \sum_{\substack{m \leq n \\ c \leq f(m) \leq d}} 1, \quad N(f; c) = N(f; c, \infty).$$

The main result of this paper, which constitutes a wide generalization of the author's work on abundant numbers (this Zbl. 10, 103), is that  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f; c)/n$  exists and is a continuous function of  $c$ . The case of the abundant numbers is obtained by taking  $f(m) = \log \frac{\sigma(m)}{m}$ ,  $c = \log 2$ . — Suppose first  $f(m)$  satisfies the more stringent conditions: (3)  $f(p^\alpha) = f(p)$ , (4)  $\sum_p \frac{f(p)}{p}$  converges. Defining  $f_P(m) = \sum_{\substack{p|m \\ p \leq P}} f(p)$  it is easily seen that  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f_P; c)/n = A_P$  exists, and as  $A_P$  is non-decreasing and  $\leq 1$ ,  $\lim_{P \rightarrow \infty} A_P = A$  exists. That  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f; c)/n = A$  follows easily from the two lemmas: (I) For any  $\varepsilon > 0$  there exists a  $\delta$  such that  $N(f; c, c + \delta) < \varepsilon n$  for all sufficiently large  $n$ ; (II) For any  $\varepsilon, \delta > 0$  there exists a  $P(\varepsilon, \delta)$  such that for  $P > P(\varepsilon, \delta)$  and all  $n$ , the number of integers  $m \leq n$  for which  $f(m) - f_P(m) > \delta$  is less than  $\varepsilon n$ . The main difficulty lies in the proof of (I), which uses the same idea as the paper already cited. — The author then sketches the proof when (3) is not assumed. As regards (4), he shews that it can be replaced by a weaker condition (4'), and that if (4') does not hold, then  $\lim_{n \rightarrow \infty} N(f; c)/n = 1$ .

Davenport (Cambridge).

**Erdős, Paul:** Note on consecutive abundant numbers. J. London Math. Soc. 10, 128—131 (1935).

Continuing his work on abundant numbers (this Zbl. 10, 103 and 391), the author proves that there are two absolute constants  $c_1, c_2$  such that for all large  $n$  there are at least  $c_1 \log \log \log n$  but not more than  $c_2 \log \log \log n$  consecutive abundant numbers less than  $n$ . The first result is obtained by taking  $a_1 = 2 \cdot 3$ ,  $a_2 = 5 \cdot 7 \dots p_1$ ,  $a_3 = p_2 \dots p_3, \dots$ , where  $p_1$  is the least prime making  $a_2$  abundant,  $p_2$  the next prime,  $p_3$  the least prime making  $a_3$  abundant, and so on, and solving the congruences  $x \equiv r - 1 \pmod{a_r}$ ,  $r = 1, 2, \dots, v$ . The second result is proved by considering those numbers  $b_1, \dots, b_z$  of a set of  $k$  consecutive abundant numbers, which are not divisible by any prime less than a particular fixed prime  $q$ . We have

$$2^z \leq \prod_{i=1}^z \frac{\sigma(b_i)}{b_i} < \prod_{\substack{p > q \\ p|b_1, \dots, b_z}} \left( \frac{p}{p-1} \right)^{\left[ \frac{k}{p} \right] + 1},$$

and

$$z > k \prod_{p < q} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) - 2^q,$$

the latter by the sieve of Eratosthenes. From these inequalities the upper bound for  $k$  is deduced.

Davenport (Cambridge).

**Erdős, P.:** On the difference of consecutive primes. Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 124—128 (1935).

The author proves that there exists an absolute constant  $c_1$  such that ( $p_n$  denoting the  $n$ -th prime) for an infinity of  $n$

$$p_{n+1} - p_n > c_1 \frac{\log p_n \log \log p_n}{(\log \log \log p_n)^2},$$

this being an appreciable improvement on previous results (see this Zbl. 3, 246 [Westzynthuis] and 10, 248 [Ricci]). It is first proved that for any  $m$ , one can find consecutive integers  $z, z+1, \dots, z+l$  each of which is divisible by at least one of  $p_1, \dots, p_m$  and with

$$z < p_1 \dots p_m, \quad l > \frac{c_2 p_m \log p_m}{(\log \log p_m)^2}.$$



The proof depends on Brun's method and on an ingenious division of primes into classes. The main result follows on taking  $p_m$  to be the prime next below  $\frac{1}{2} \log p_n$ .  
Davenport (Cambridge).

**Erdős, P., und P. Turán: Ein zahlentheoretischer Satz.** Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1, 101—103 (1935).

Let  $a$  be a fixed integer, and let  $l(k)$  be defined (for any  $k$  prime to  $a$ ) as the least positive integer for which  $a^{l(k)} \equiv 1 \pmod{k}$ . Generalising a result of Romanoff (this Zbl. 9, 8), the authors prove here that  $\sum_k \frac{1}{kl(k)^\varepsilon}$  converges for every  $\varepsilon > 0$ . It suffices to prove that  $\sum_k \frac{1}{k}$  extended over those  $k$  for which  $l(k) < (\log k)^{\frac{2}{\varepsilon}}$  converges. For this it suffices that the number of divisors  $\leq n$  of  $(a-1)(a^2-1) \dots (a^N-1)$  should be  $O(n/\log^2 n)$ , where  $N = \left[ (\log n)^{\frac{2}{\varepsilon}} \right]$ . This is proved by estimating the number of prime factors, and considering separately those divisors with more than  $\sqrt{\log n}$  different prime factors and those with less.  
Davenport (Cambridge).

**Wintner, Aurel: On the asymptotic distribution of the remainder term of the prime-number theorem.** Amer. J. Math. 57, 534—538 (1935).

Nach dem zweiten v. Mangoldt'schen Satz läßt sich der Unterschied  $x - \psi(x)$ , wo  $\psi(x) = \sum_{p^2 \leq x} \log p$ , für  $x > 1$  ( $x \neq p^m$ ) explizit in der Form

$$x - \psi(x) = \sum n_k x^{\varrho_k} / \varrho_k + \log[2\pi(1 - x^{-2})^{1/2}]$$

schreiben, wo in der Summe  $\varrho_k = \sigma_k + i\gamma_k$  ( $|\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots$ ) die verschiedenen nichttrivialen Nullstellen von  $\zeta(s)$  durchläuft und  $n_k$  die Vielfachheit von  $\varrho_k$  bedeutet. Schreibt man das Hauptglied  $\sum n_k x^{\varrho_k} / \varrho_k$  in der Form  $x^{1/2} \varphi(x)$ , so gilt unter Annahme der Riemannschen Vermutung  $\varphi(x) = \sum n_k x^{i\gamma_k} / \varrho_k$ , also  $\varphi(e^x) = \sum n_k e^{i\gamma_k x} / \varrho_k$  für  $x > 0$  ( $x \neq m \log p$ ). Auf Grund einer naheliegenden Verallgemeinerung eines Satzes von Cramér, wonach unter Annahme der Riemannschen Vermutung

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\log \omega)^{-1} \int_2^\omega (1 - \psi(x)/x)^2 dx = \sum n_k^2 / |\varrho_k|^2$ , beweist nun Verf., daß die Relation  $\varphi(e^x) = \sum n_k e^{i\gamma_k x} / \varrho_k$  auch im Sinne mittlerer Konvergenz stattfindet, d. h.  $\varphi(e^x)$  ist auf der Halbachse  $x > 0$  eine  $B^2$ -fastperiodische Funktion mit der Fourierreihe  $\sum n_k e^{i\gamma_k x} / \varrho_k$ , und besitzt somit insbesondere eine asymptotische Werteverteilung. Umgekehrt folgt aus dem  $B^2$ -fastperiodischen Charakter der Funktion  $\varphi(e^x)$  die Riemannsche Vermutung.  
B. Jessen (Kopenhagen).

**Dickson, L. E.: Cyclotomy, higher congruences, and Waring's problem.** Amer. J. Math. 57, 391—424 (1935).

The number of solutions of  $ax^e + by^e \equiv c \pmod{p}$ , where  $p$  is a prime and  $p-1 = ef$ , is connected with the constants  $(k, h)$  defined as follows:  $(k, h)$  is the number of pairs  $(t, z)$  (chosen from  $0, 1, \dots, f-1$ ) for which  $1 + g^{et+h} \equiv g^{ez+h} \pmod{p}$ , where  $g$  is a primitive root of  $p$ . The evaluation of  $(k, h)$  is treated here for  $e = 2, \dots, 6$  (considered previously) and  $e = 8, 10, 12$ . Relations to accomplish this are obtained by linking  $(k, h)$  with coefficients in the product of two periods as a linear combination of periods. The resulting formulae depend: when  $e = 2$ , only on  $p$  and the parity of  $\frac{1}{2}(p-1)$ ; when  $e = 3$  on the decomposition of  $4p$  as  $L^2 + 27M^2$ ; when  $e = 4$  on  $p = x^2 + 4y^2$ ; when  $e = 5$  and  $10$  on the essentially unique decomposition  $16p = x^2 + 50u^2 + 50v^2 + 125w^2$ ,  $v^2 - 4uv - u^2 = xw$ ; when  $e = 6$  on  $p = A^2 + 3B^2$ ; when  $e = 8$  on  $p = x^2 + 4y^2 = a^2 + 2b^2$ ; when  $e = 12$  on  $p = x^2 + 4y^2 = A^2 + 3B^2$ .

G. Pall (Montreal).



**Chowla, S.: Proof that every large number is a sum of eight almost equal cubes.**

Indian Phys.-Math. J. **6**, 1—2 (1935).

The proof is a modification of Landau's method. Wright had previously given a like result for nine cubes (Philos. Trans. Roy. Soc. London **1933** [A. 707]; this Zbl. **6**, 396).

G. Pall (Montreal).

**Chowla, S., and S. Sastry: Note on hypothesis K of Hardy and Littlewood.** Indian Phys.-Math. J. **6**, 3 (1935).

An example is given of two equal sums of ten tenth powers. G. Pall.

**Chowla, S.: An easier Waring's problem.** Indian Phys.-Math. J. **6**, 5—7 (1935).

An identity involving 20-th powers shows that  $v(20) \leq 161$ . Wright had shown that  $v(20) \leq 185$  (this Zbl. **10**, 103).

G. Pall (Montreal).

**James, R. D.: A Waring problem for binary cubic forms.** J. London Math. Soc. **10**, 84—88 (1935).

Let  $g$  denote the least integer such that every positive integer is a sum of  $g$  values of  $x^3 + cxy^2$  for integral non-negative  $x, y$ . It is shown that  $g = 3$  if  $c = 1, 2$ ;  $g = 4$  if  $c = 3, 4$ ;  $g = 5$  if  $c = 5$ ;  $g = 6$  if  $c = 6$ ;  $g = 7$  if  $c = 8, \dots, 13$ ;  $g = 8$  if  $c = 7, 14, \dots, 22$ ;  $g = 9$  if  $c = 0$  or  $c \geq 23$ . The proof is based on the representation of integers in quadratic forms such as  $y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 + 3y_4^2$  or (for cases  $c = 1, 2$ )  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ .

G. Pall (Montreal).

**Skolem, Th.: Einige Sätze über  $p$ -adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen.** Math. Ann. **111**, 399—424 (1935).

Fortsetzung der Untersuchungen über die Anwendung  $p$ -adischer Potenzreihen auf diophantische Gleichungen (vgl. dies. Zbl. **8**, 105; **11**, 392). Sei  $K$  ein endlicher algebraischer Zahlkörper,  $\mathfrak{p}$  ein Primideal hieraus,  $K_{\mathfrak{p}}$  die  $p$ -adische Erweiterung von  $K$ ,  $\mathfrak{P}_{m+1}$  der Ring aller in der Umgebung von  $x_1 = x_2 = \dots = x_{m+1} = 0$  konvergenten Potenzreihen in  $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$  mit  $p$ -adischen Koeffizienten. Verf. untersucht zunächst die gemeinsamen Nullstellen endlichvieler Elemente von  $\mathfrak{P}_{m+1}$ . Mittels eines  $p$ -adischen Analogons zum Weierstraßschen Vorbereitungssatz (Sei  $P$  ein Element aus  $\mathfrak{P}_{m+1}$ , das für  $x_1 = \dots = x_m = 0$  nicht identisch in  $x_{m+1}$  verschwindet; dann

gibt es zwei Elemente  $Q$  und  $R$  aus  $\mathfrak{P}_{m+1}$  mit  $P = QR$ , so daß  $Q = \sum_{r=0}^l B_r x_{m+1}^r$  ein

Polynom in  $x_{m+1}$  ist, dessen höchster Koeffizient  $B_l$  für  $x_1 = \dots = x_m = 0$  eine  $p$ -adische Einheit darstellt, während  $R$  für  $x_1 = \dots = x_m = x_{m+1} = 0$  nicht verschwindet) zeigt er folgenden Satz: Die Elemente  $P_1, \dots, P_n$  von  $\mathfrak{P}_{m+1}$  mögen gleichzeitig in einer unendlichen Menge  $M$   $p$ -adischer Punkte  $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1})$ , deren sämtliche Koordinaten gegen Null streben, verschwinden. Dann gibt es Elemente

$$Q_i, S_j, R_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

von  $\mathfrak{P}_{m+1}$ , so daß identisch

$$S_j P_j = \sum_{i=1}^m Q_i R_{ij} \quad (j = 1, \dots, n)$$

ist, und ferner in einer unendlichen Teilmenge  $M_0$  von  $M$  alle  $Q_i = 0$  und alle  $S_j \neq 0$  sind. Bedeuten  $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(m+1)}$  beliebige  $m+1$  der Potenzreihen  $P_j$ , so ist außerdem in jedem Punkt von  $M_0$  die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(m+1)})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})} \neq 0.$$

Man kann also zu  $P_1, \dots, P_n$  beliebig viele und beliebig oft wiederholte Funktionaldeterminanten dieser Gestalt hinzunehmen und kommt stets wieder zu einem System von Reihen der gleichen Eigenschaft. — Durch nicht ganz leichte Überlegungen leitet Verf. aus diesem Satz das folgende bemerkenswerte Resultat her: Sei  $K$  ein endlicher algebraischer Zahlkörper, der die zueinander konjugierten Körper  $K^{(1)}, \dots, K^{(m)}$  vom Grad  $\geq m$  als Unterkörper enthält; unter  $\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_t^{(1)}$  seien  $t$  Zahlen aus  $K^{(1)}$ , unter  $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_t^{(i)}$  die entsprechenden konjugierten Zahlen aus  $K^{(i)}$  verstanden. Ferner

sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal aus  $K$ ,  $K_{\mathfrak{p}}$  die  $\mathfrak{p}$ -adische Erweiterung von  $K$ , und es seien  $a_{i\lambda}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $\lambda = 1, \dots, m-2$ ) beliebige Zahlen aus  $K_{\mathfrak{p}}$ . Haben die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^m a_{i\lambda} \alpha_1^{(i)x_1} \dots \alpha_t^{(i)x_t} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m-2) \quad (1)$$

unendlichviele Lösungen in ganzen rationalen  $x_1, \dots, x_t$ , so gibt es ganze rationale  $l_1, \dots, l_t$ , die nicht alle Null sind, so daß  $\alpha_1^{(1)l_1} \dots \alpha_t^{(1)l_t}$  zu einem echten Unterkörper von  $K^{(1)}$  gehört. — Aus diesem Satz über exponentielle Gleichungen wird der folgende Teilfall des Thueschen Satzes hergeleitet: Ist  $f(x, y)$  eine irreduzible Binärform mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß  $f(x, 1)$  nicht nur reelle Nullstellen hat, und  $a$  eine ganze rationale Zahl, so hat  $f(x, y) = a$  höchstens endlichviele Lösungen in ganzen rationalen  $x, y$ . — Im Spezialfall  $t = 2$ ,  $m \geq 5$  zeigt Verf. schließlich, daß ein System von nur  $m - 3$  Gleichungen der Form (1) ebenfalls nur dann unendlichviele Lösungen in ganzen rationalen  $x_1, x_2$  hat, wenn es zwei ganze rationale Zahlen  $l_1, l_2$ , die nicht beide verschwinden, gibt, so daß  $\alpha_1^{(1)l_1} \alpha_2^{(1)l_2}$  in einem echten Unterkörper von  $K^{(1)}$  liegt. Aus diesem Satz (dessen Beweis 9 Seiten erfordert) folgt dann leicht der folgende Satz über zerlegbare Formen:  $K^{(1)}$  sei ein solcher Körper 5-ten Grades, daß unter seinen konjugierten Körpern  $K^{(1)}, \dots, K^{(5)}$  allein ein reeller vorkommt. Sind  $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}$  drei in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängige ganze Zahlen aus  $K^{(1)}$  und  $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}, \gamma^{(i)}$  ihre Konjugierten aus  $K^{(i)}$ , so hat für jedes ganze rationale  $a$  die Gleichung

$$\prod_{i=1}^5 (\alpha^{(i)}x + \beta^{(i)}y + \gamma^{(i)}z) = a$$

nur endlichviele ganze rationale Lösungen.

Mahler (Groningen).

**Koksma, J. F.:** Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. *Compositio Math.* 2, 250—258 (1935).

Von H. Weyl [*Math. Ann.* 77, 313—352 (1916)] stammt folgender Satz: Es sei  $\{M(x)\}$  ( $x = 1, 2, \dots$ ) eine Folge von ganzen Zahlen,  $M(X) \neq M(x)$  für  $X \neq x$ ; dann ist die Folge  $\{\theta M(x)\}$  ( $x = 1, 2, \dots$ ) für fast alle reellen  $\theta$  gleichverteilt (mod 1). Den Grundgedanken des Weylschen Beweises benutzend, beweist Verf. einen allgemeinen Satz, von welchem nur der folgende, auch ziemlich allgemeine Spezialfall hervorgehoben sei: Es sei  $\alpha < \beta$ ,  $K > 0$ ; für jedes natürliche  $x$  sei  $f(x, \theta)$  eine reelle und stetig differenzierbare Funktion von  $\theta$  im Intervall  $(\alpha, \beta)$ ; für je zwei natürliche Zahlen  $X, x$  mit  $X \neq x$  sei  $f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta)$  monoton und dem absoluten Betrage nach  $\geq K$  in  $(\alpha, \beta)$ . Dann ist die Folge  $\{f(x, \theta)\}$  ( $x = 1, 2, \dots$ ) für fast alle  $\theta$  aus  $(\alpha, \beta)$  gleichverteilt (mod 1). — Daraus folgt 1. der zitierte Weylsche Satz, 2. folgender Satz: Ist  $M(x) \geq 1$  für  $x = 1, 2, \dots$ , und gibt es eine Zahl  $K > 0$ , so daß für je zwei natürliche Zahlen  $X, x$  mit  $X \neq x$  gilt  $|M(X) - M(x)| \geq K$ , so ist die Folge  $\{\theta M(x)\}$  ( $x = 1, 2, \dots$ ) für fast alle  $\theta > 1$  gleichverteilt (mod 1). — Insbesondere ist also die Folge  $\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \dots$  für fast alle  $\theta > 1$  gleichverteilt (mod 1). Jarník (Praha).

## Analysis.

### Differentialgleichungen:

**Orloff, C.:** Un procédé d'approximation concernant les intégrales des équations différentielles. *Bull. Acad. Sci. Math. Nat.*, Belgrade Nr 2, 91—93 (1935).

For the case of holomorphic functions, the author modifies Picard's method of successive approximations by neglecting terms of degree greater than  $n$  in obtaining the  $n$ -th approximation. Let  $f(x, y)$  be holomorphic about  $(x_0, y_0)$ . The recurrence formulas,  $u_n = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt$ ,  $y_n =$  terms of degree not exceeding  $n$  in  $u_n$ , define a polynomial  $y_n$  which can be proved the sum of the first  $(n+1)$  terms in the expansion of the function defined by  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Thomas (Durham).



**Brun, Viggo:** Über die Durchführung der Eulerschen Differentiationen bei Lösung der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ . (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 80—88 (1935).

Will man die Lösung von  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  nach der Potenzreihenmethode berechnen, so hat man  $y'', y'''$  usw. für  $x = x_0$  zu ermitteln, was erhebliche rechnerische Schwierigkeiten macht. Der Autor gibt eine Schreibweise an, die diese Berechnung erleichtern soll und gelangt in Spezialfällen zu Rekursionsformeln. Erläuterung an dem Beispiel  $y' = y^2 + 1$ . Rellich (Marburg, Lahn).

**Drinfeld, G.:** Sur un type d'invariants intégraux. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 518—522 (1935).

L'auteur établit quelques propriétés élémentaires des diviseurs linéaires de la forme  $\Omega_p$ ,  $\int \Omega_p$  étant un invariant intégral absolu  $p$ -uple du système des équations  $\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt$ . Il indique comment avec ces diviseurs peuvent être obtenus des invariants intégraux nouveaux du système considéré. Janczewski.

**Persidsky, K.:** Zur Stabilität der Bewegungen. Rec. math. Moscou 42, Nr 1, 37—41 u. dtsh. Zusammenfassung 42 (1935) [Russisch].

Verf. führt die Aufgabe der Untersuchung der Stabilität einer vorgegebenen Bewegung des Systems:

$$\frac{dx_s}{dt} = \Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

auf die Untersuchung der Holomorphität gewisser Potenzreihen zurück. Die Funktionen  $\Phi_s$  werden gleichmäßig beschränkt und holomorph innerhalb des Gebietes  $|x_s| < R$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ )  $-\nu \leq \text{Im}(t) \leq +\nu$ ,  $\text{Real}(t) \geq 0$  vorausgesetzt ( $R$  und  $\nu$  positive Zahlen). Zur Beantwortung der Frage nach der Konvergenz der oben erwähnten Reihen wird das Kriterium von Schur (Potenzreihen im Innern des Einheitskreises; J. reine angew. Math. 147) angewandt. In dieser Weise erhält Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität der Bewegung in Form einer unendlichen Reihe von Ungleichungen. A. Andronoff, A. Witt (Moskau).

**Kobsarew, J.:** Zur Theorie der nichtlinearen Resonanz. Techn. Physics USSR 2, 27—42 (1935).

Verf. betrachtet die Resonanzerscheinungen in nichtlinearen Systemen mit einem Freiheitsgrad (gewöhnliche Resonanz, multiple Resonanz, Frequenzteilung) nach der Methode von van der Pol, die mit der Untersuchung der sog. „verkürzten“ Gleichung verbunden ist. Diese Methode wurde auf eine ganze Reihe physikalischer Aufgaben angewandt und fand ihre Begründung in den Arbeiten von Fatou, Mandelstam und Papalexi, Kryloff und Bogoliuboff. Verf. gibt eine neue Ableitung der „verkürzten“ Gleichung. Das Ziel des Verf. ist am besten mit seinen eigenen Worten zu formulieren: Verf. stellte sich die Aufgabe, die Gleichungen erster Näherung in allgemeiner Form nach einer möglichst einfachen wenn auch nicht strengen Methode zu erhalten, die einerseits an die „quasilineare“ Methode zur Erhaltung dieser Gleichungen anschließt und andererseits eine anschauliche Interpretation zuläßt.

A. Andronoff u. A. Witt (Moskau).

**Pedersen, P. O.:** Subharmonics in forced oscillations in dissipative systems. I/II. J. Acoust. Soc. Amer. 6, 227—238 u. 7, 64—70 (1935).

Substantially a reprint of a former paper (this Zbl. 7, 245). Strutt (Eindhoven).

**Erdélyi, A.:** Über die rechnerische Ermittlung von Schwingungsvorgängen in Kreisen mit periodisch schwankenden Parametern. Arch. Elektrotechn. 29, 473—489 (1935).

Verf. behandelt die freien und die erzwungenen Schwingungen der Hillschen Differentialgleichung. Für die freien Schwingungen werden die Stabilitäts- und Instabilitätsgebiete unterschieden und für diese Gebiete die bekannten Näherungslösungen angegeben. Bei den erzwungenen Schwingungen setzt Verf. als Lösungen Fouriersche Reihen an. Als Schluß gibt er ein Beispiel. M. J. O. Strutt.

**Frenkel, M.:** Die asymptotischen Lösungen der in der Theorie der radioaktiven  $\alpha$ -Emission auftretenden Differentialgleichung. *Z. Physik* 95, 599—629 (1935).

Verf. führt die Integration der bei zahlreichen physikalischen Problemen in Erscheinung tretenden Differentialgleichung

$$y'' + y\left(1 - \frac{k}{x}\right) = 0$$

für komplexe  $k$  und  $x$  durch. Für die Partikularlösungen

$$y_k^*(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{L_v} e^{x f(\tau)} d\tau, \quad f(\tau) = \operatorname{tg} \tau - \frac{k}{x} \tau \quad (v = 1, 2)$$

stellt er geeignete Integrationskurven (sie genügen der Gleichung  $\Im f(\tau) = \text{konst.}$ ), diskutiert ihren Verlauf und die Gebiete, in die sie die  $\tau$ -Ebene zerlegen. — Im 2. Teil werden unter der Voraussetzung

$$\frac{k}{x} = \left| \frac{k}{x} \right| e^{i\mu} \quad 0 < \mu < \pi, \quad \Re(x) > 0$$

die Integrationswege für die Integrale, die  $y_k^1(x)$  und  $y_k^2(x)$  darstellen, bestimmt, sowie die „Umlaufsrelationen“ ermittelt, die die Fortsetzung dieser Lösungen in das Gebiet  $\Re(x) < 0$  liefern. Es folgt die eigentliche Auswertung der Integrale nach der Sattelpunktmethode sowie einer neuen Methode, die die Auswertung auch dann gestattet, wenn der Integrand auf längere Strecken berücksichtigt werden muß. Die Anwendung dieser Berechnung auf die quantitative Theorie der radioaktiven  $\alpha$ -Emission bildet den Schluß der Arbeit. v. Koppenfels (Hannover).

**Pfeiffer, G. V.:** Facteur intégrant du système d'équations symboliques équivalent au système d'équations linéaires en jacobiens, qui satisfait aux conditions d'Hamburger généralisées. *C. R. Acad. Sci. URSS* 2, 350—352 u. franz. Zusammenfassung 353 (1935) [Russisch].

**Pfeiffer, G. V.:** Sur les équations et les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre de plusieurs fonctions inconnues qui admettant les intégrales de M. Hamburger. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 1, 11—26 (1934) [Ukrainisch].

L'auteur indique les formes diverses des équations et des systèmes d'équations linéaires au Jacobiens, qui possèdent l'intégrale de Max Hamburger; pour le système il établit les conditions algébriques généralisées de Max Hamburger. *Autoreferat.*

**Pfeiffer, G. V.:** Détermination des systèmes jacobiens et jacobiens-généralisés, qui sont disposés dans l'espace  $p_{\sigma\tau}$ : sur les équations linéaires en jacobiens, satisfaisant aux conditions d'Hamburger, et sur les systèmes d'équations, pour lesquels sont remplies les conditions d'Hamburger généralisées. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 2, 3—16 u. franz. Zusammenfassung 16 (1935) [Ukrainisch].

**Pfeiffer, G. V.:** Sur l'imposition des systèmes jacobiens et jacobiens-généralisés d'équations linéaires sur les équations linéaires en jacobiens et les systèmes d'équations, possédant l'intégrale de Max Hamburger. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 2, 17—22 (1935) [Ukrainisch].

**Pfeiffer, G. V.:** Sur les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, sur les équations linéaires en Jacobiens et sur les systèmes d'équations linéaires en Jacobiens, qui possèdent la même intégrale générale. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 3/4, 63—67 u. franz. Zusammenfassung 67 (1935) [Ukrainisch].

**Pfeiffer, G. V.:** Systèmes Jacobiens d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre de plusieurs fonctions inconnues, disposés sur une série d'équations linéaires en Jacobiens, satisfaisant aux conditions d'Hamburger. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 3/4, 69—76 u. franz. Zusammenfassung 76 (1935) [Ukrainisch].



**Michnevitch, Daniel:** Formation des équations aux dérivées partielles du premier ordre au moyen d'intégrales données des caractéristiques. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 207—238 (1935).

Chapter I concerns groups of functions [Goursat, Équations du premier ordre, p. 412 (1921)] and gives in addition to known results theorems about the parity of the number of distinguished functions. Chapter II treats the formation of a partial differential equation of the first order in a single unknown having a given function as integral of its characteristics and not involving the unknown explicitly. The results given are for the most part known in some form; in particular, the theorem on p. 224 is given by Goursat (loc. cit., § 87). Chapter III answers similar questions when the unknown is allowed to enter. Chapter IV treats the problem of determining an equation having part of the differential system defining its characteristics preassigned.

*J. M. Thomas* (Durham).

**Saltykow, N.:** Théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 117 bis 138 (1935).

The paper develops the method of Laplace as modified by Legendre [Goursat, Equations du second ordre, 2, 1—39 (1897)], replacing the given equation by two equations of the first order and treating the case of  $n$  independent variables.

*J. M. Thomas* (Durham).

**Evans, Griffith C.:** Correction and addition to „Complements of potential theory“. Amer. J. Math. 57, 623—626 (1935).

**Fueter, Rud.:** Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$  und  $\Delta \Delta u = 0$  mit vier reellen Variablen. Comment. math. helv. 7, 307—330 (1935).

Sind  $i_0 = 1, i_1, i_2, i_3$  die Quaternioneneinheiten, so betrachtet der Verf. die Funktionen  $w = f(z)$ , wo  $w = \sum_{k=0}^3 u_k i_k, z = \sum_{k=0}^3 x_k i_k$ , also  $u_k = u_k(x_0, x_1, x_2, x_3); k = 0, \dots, 3$ .

Es sei nun  $w^{(h)} = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_h} i_k$ . Eine Funktion  $w = f(z)$  heißt in  $H$  rechts (links) regulär, wenn die  $u_k$  in  $H$  reelle, stetige, endliche und zweimal stetig differentiierbare Funktionen der  $x_k$  sind, die die Bedingung  $\sum_k w^{(k)} i_k = 0$  (bzw.  $\sum_k i_k w^{(k)} = 0$ ) erfüllen.

Demgemäß sind die analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen spezielle rechts- wie zugleich auch linksreguläre Funktionen; die analytischen Funktionen zweier komplexen Veränderlichen sind zwar rechts-, aber nicht linksregulär. In beiden Fällen haben wir es mit regulären Funktionen vom Range 2 (statt im allgemeinen Falle vom Range 4) zu tun. Verf. konstruiert aber aus den analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen Funktionen  $W(z)$  der Quaternionenvariablen  $z$ , bei denen  $\Delta W$  rechts- wie linksreguläre Funktionen vom Range 4 sind, z. B.  $W = z^n$ . (Für alle diese  $W(z)$  gilt  $\Delta \Delta W = 0$ .) Auch gibt es zu jeder reellen Funktion  $u_0(x_1, \dots, x_3)$  mit  $\Delta u_0 = 0$  eine zugleich rechts- wie auch linksreguläre Funktion, von der  $u_0$  die reelle Komponente ist.

Im ersten Hauptsatz zeigt der Verf., daß für die (rechts wie auch links) regulären Funktionen ein Analogon zum Cauchyschen Integralsatz gilt. Sodann wird das Entsprechende für die Cauchysche Integralformel bewiesen. Zur Aufstellung der Taylorschen und Laurentschen Reihenentwicklungen wird der Begriff der rechts- (bzw. links-) holomorphen Funktion benutzt.  $w = f(z)$  heißt rechts- bzw. links-holomorph, wenn die Komponenten  $u_k$  in  $H$  reelle, stetige und zweimal stetig differentiierbare Funktionen der  $x_k$  sind, und wenn  $\Delta_z w$  in  $H$  eine rechts- bzw. linksreguläre Funktion ist. Ist  $w = f(z)$  rechtsregulär, so ist

$$W = F(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) d\zeta (\zeta - z)^{-1}$$

(wobei  $R$  ein fester Oberflächenraum im Regularitätsgebiet von  $f(\zeta)$ ,  $z$  im Innern von  $R$ ) eine rechtsholomorphe Funktion. Zwischen einer rechtsholomorphen Funk-

tion  $W$  und der sie erzeugenden rechtsregulären Funktion  $w$  besteht ein sich mod  $\Delta$  gegenseitig eindeutiges Bedingen. — Verf. führt weiter noch den unendlich fernen Punkt ein, beweist das Analogon des Liouvilleschen Satzes und behandelt die punktförmigen Singularitäten der eindeutigen rechtsregulären Funktionen. *Behnke.*

### Spezielle Funktionen:

**Basoco, M. A.:** On a certain identity due to Hermite. Amer. Math. Monthly 42, 310 bis 314 (1935).

In Verallgemeinerung einer elementaren Identität von Hermite beweist Verf. den Satz: „ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{2k}(x)$  seien  $2k$  willkürliche Funktionen, deren jede  $n$  mal differenzierbar ist. Es werde definiert

$$F(\varphi_j) \equiv \sum (-1)^{n_2 + n_4 + \dots + n_{2k}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_{2k}!} \varphi_1^{(n_1)}(x) \varphi_2^{(n_2)}(x) \dots \varphi_{2k}^{(n_{2k})}(x),$$

wo die Summe über alle Systeme nichtnegativer ganzer Zahlen  $n_1, \dots, n_{2k}$  mit  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{2k}$  zu erstrecken ist und wo die oberen Indizes Ableitungen der betreffenden Ordnung bedeuten. Weiter seien  $c_1, c_2, \dots, c_{2k}$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}$  willkürliche Konstante, die der Bedingung  $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2k-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2k}$  genügen. Dann gilt identisch in  $x$

$$F(c_j e^{\alpha_j x} \varphi_j(x)) = c_1 c_2 \dots c_{2k} e^{(\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2k})x} F(\varphi_j(x)).$$

und fügt einen zweiten ähnlichen Satz hinzu. Sodann wendet er diese Sätze auf den Fall an, daß die  $\varphi_j(x)$  ein System zu denselben Perioden gehöriger doppeltperiodischer Funktionen dritter Art sind, und gewinnt durch die in den Sätzen gebildeten Summen aus ihnen neue Funktionen, die sich wieder als doppeltperiodisch von dritter Art (und unter zusätzlichen Voraussetzungen sogar von zweiter oder erster Art) erweisen. Endlich wendet er den Hermiteschen Spezialfall (obiger Satz mit  $k = 1$ ) auf elliptische Thetafunktionen an, wobei Formeln für die Transformation 2. Ordn. herauskommen.

*Bessel-Hagen (Bonn).*

**Petrovitch, Michel, et Jovan Karamata:** Représentations des fonctions doublement périodiques au moyen des intégrales définies. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 239—243 (1935).

Ein Ansatz H. Poincarés (Œuvres 1, 48), die langsam konvergierenden Teilbruchreihen doppeltperiodischer Funktionen in bestimmte Integrale umzusetzen, wird zunächst konvergenztechnisch in Ordnung gebracht. Teilt man nämlich ein zweidimensionales Punktgitter, etwa rechteckiger Maschen, in vier Quadranten und deutet die Gitterpunkte eines Quadranten als Pole von Teilbrüchen, so wird man nach Eintragung Eulerscher Integrale auf konvergente geometrische Doppelreihen geführt. Jede elliptische Funktion stellt sich alsdann dar durch uneigentliche Integration über einen geschlossenen Ausdruck von Polynomen und Exponentialfunktionen. Weiterhin bilden die Verf. eine Darstellung elliptischer Funktionen durch Integralquotienten; dabei sind Zähler und Nenner gegeben durch Kurvenintegrale. Die zugehörigen Integranden enthalten Weierstrassens  $\wp$ -Funktion und Polynome einer Veränderlichen.

*Wilh. Maier (Lafayette).*

**Nichols, G. D.:** The arithmetized expansions for certain doubly periodic functions of the third kind. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 361—365 (1935).

Für die 32 Funktionen

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \vartheta_1^3 \vartheta_\alpha(x + y) / \vartheta_\beta^3(x) \vartheta_\gamma(y),$$

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \vartheta_1^3 \vartheta_\alpha^2(x + y) / \vartheta_\beta^3(x) \vartheta_\gamma^2(y),$$

wo  $x$  und  $y$  unabhängige komplexe Veränderliche sind, die  $\vartheta$ -s die Jacobischen Thetafunktionen bedeuten und  $\alpha, \beta, \gamma$  gewisse 16 Tripel unter den 64 sind, die sich aus den Zahlen 0, 1, 2, 3 bilden lassen, werden ohne Beweis die Fourierentwicklungen mitgeteilt.

*Bessel-Hagen (Bonn).*



**Nicotra, Salvatore:** Sulla costruzione d'una particolare funzione e sue applicazioni in idrodinamica. Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncaei 88, 114—133 (1935).

Let a circular ring be bounded by two concentric circles  $s_q, s_1$  the latter being the external one. Let  $z_n$  be the image of  $z_{1-n}$  in  $s_1$  and  $z_{-n}$  the image of  $z_{n-1}$  in  $s_q$  so that  $z_{-2n} = z_0 q^{2n}$ ,  $z_{2n} = z_0 q^{-2n}$ ,  $Q_0^2 z_{1-2n} = z_0 q^{2n}$ ,  $Q_0^2 z_{2n+1} = z_0 q^{-2n}$ . The function considered by the author is

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z - z_{2n}}{Q_0(z - z_{2n+1})}.$$

This function is expressed in terms of the Weierstrassian  $\sigma$ -function and is used to represent the fluid motion produced by a vortex in the region between the two circles. The forces on the circular walls are calculated and it is found that the resultant force on the two walls is zero and the resultant moment about the center of the circles is also zero.

H. Bateman (Pasadena).

**Myrberg, P. J.:** Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen. (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 20—33 (1935).

Die Arbeit ist ein Referat über eine ausführliche Darstellung, die demnächst in den Acta math. erscheinen soll. Verf. stellt seine Methode, die u. a. auf sämtliche

hyperelliptischen Gebilde anwendbar ist, am Beispiel des Gebildes  $(\mathfrak{G}) y^2 = \prod_{i=1}^6 (x - e_i)$

dar. Durch Grenzkreisuniformisierung wird die universelle Überlagerungsfläche  $W$  der Riemannschen Fläche  $R$  von  $\mathfrak{G}$  auf das Innere des Einheitskreises der  $z$ -Ebene abgebildet, wobei die aufgeschnittene  $x$ -Ebene in ein zehnteiliges Kreisbogenpolygon übergeht; die zugehörige Grenzkreisgruppe heiße  $\Gamma_x$ . Das elliptische Integral

$u = \frac{1}{2} \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}$  bildet  $W$  auf eine Überlagerungsfläche der parallelo-

grammatisch aufgeteilten und in gewisser Weise aufgeschnittenen  $u$ -Ebene ab, der im  $z$ -Einheitskreis der Fundamentalbereich derjenigen Untergruppe  $\Gamma_u$  von  $\Gamma_x$  entspricht, bei welcher  $u$  invariant bleibt. (Die Faktorgruppe  $\Gamma_x/\Gamma_u$  ist die Gruppe der geraden elliptischen Funktionen.)  $\Gamma_u$  ist eine „fuchsoid“ Gruppe, läßt sich aber als Grenzfall einer Folge „fuchsscher“ Gruppen  $\Gamma_m$  für  $m \rightarrow \infty$  auffassen.  $\Gamma_u$  und die  $\Gamma_m$  haben das Geschlecht 0. Aus den Eigenschaften der  $\Gamma_m$  folgt die Darstellbarkeit ihrer Hauptfunktionen durch absolut konvergente Poincarésche Reihen der Dimension  $-2$  und

durch Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  die Darstellbarkeit der Hauptfunktion  $\frac{u'(a)}{u(z) - u(a)}$  von  $\Gamma_u$

durch bedingt konvergente Poincarésche Reihen (in der Variablen  $a$ ) mit einer durch diesen Grenzübergang definierten Summationsordnung. Diese kann auf Grund der Zerschneidung der  $u$ -Ebene leicht explizit angegeben werden. Eine Darstellung für  $x(z) - x(z_0)$  ergibt sich aus  $x(z) - x(z_0) = \wp(u) - \wp(u_0)$  mit Hilfe der Jacobischen Thetafunktion, für  $y(z)$  auf Grund der Beziehung der  $\sqrt{x - e_i}$  zu den  $\vartheta$ -Quotienten elliptischer Integrale, hieraus schließlich für eine beliebige Funktion von  $\mathfrak{G}$  durch Quotienten von solchen Funktionen zweier elliptischer Integrale  $u$  und  $v$ , welche das gleiche Invarianzverhalten aufweisen wie die elliptischen Thetafunktionen. — Eine andere, mit der obigen verwandte Methode des Verf. knüpft an frühere Untersuchungen an, die in Acta math. 59 (dies. Zbl. 5, 296) ausführlich dargestellt sind.

Petersson (Hamburg).

**Schmidt, Adolf:** Der Satz von Franz Neumann über Produktsummen von Kugelfunktionen. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1935, 242—247.

Einige sehr naheliegende Bemerkungen zu der Auflösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^q a_i x_i^k = \int_{-1}^{+1} x^k dx, \quad k = 0, 1, \dots, q-1,$$

wobei die  $x_i$  bekannte Größen sind. Sind diese insbesondere die Nullstellen des Legendreschen Polynoms  $P_q(x)$ , so sind natürlich die  $a_i$  die Koeffizienten der Gauß-Jacobischen mechanischen Quadratur. Die in der Arbeit behandelten Identitäten sind Spezialfälle derselben.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Shastri, N. A.:** Some properties of the  $k$ -function with non-integral index. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **1**, 768—771 (1935).

Starting with the equation

$$2\pi i n k_{2n}(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^{(0+)} u^{-n} (2x - u)^n du$$

the author finds that when  $n$  is not an integer and  $R(n) < 1$

$$n\pi k_{2n}(x) = e^{-x} \sin n\pi \int_0^\infty e^{-\varrho} \varrho^{-n} (\varrho + 2x)^n d\varrho,$$

$$nx k_{2n}(x) = (x + y) \sum_{r=0}^\infty (n - r) k_{2n-2r}(x) k_{2r}(y),$$

$$u^n \exp(x/u) k_{2n}(x/u) = e^x \sum_{r=0}^\infty \binom{n-r}{r} (u-1)^r k_{2n-2r}(x),$$

$$k_{2n}(x + \tau) = \frac{1}{n!} e^{-\tau} \sum_{m=0}^\infty \binom{n}{m} (2\tau^2)^{\frac{m}{2}} W_{n-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}}(2x),$$

where  $W_{r,s}(z)$  is Whittaker's function.

H. Bateman (Pasadena).

### Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

**Monteiro, Antonio:** Sur une classe de noyaux de Fredholm développables en série des noyaux principaux. C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 2143—2145 (1935).

The kernel  $K(M, P)$  satisfies the condition  $\iint_\nu |K(M, P)|^2 dM dP < \infty$ . Let  $A(M, P)$  be a principal part of  $K(M, P)$  corresponding to the characteristic value  $\lambda_0$ , so that  $A(M, P) = \sum_{i=1}^n X_i(M) Y_i(P)$ ,  $X_i$ , as well as  $Y_i$  linearly independent. If for each principal part, the functions  $X_i$  and  $Y_i$  are expressible in terms of the same orthonormal system  $\Phi_i$  of order  $n$  the kernel  $K$  is said to be regular. For regular kernels it is stated that the sum of the principal parts converges in the double mean to a function  $H(M, P)$ , such that  $K(M, P) - H(M, P)$  has no characteristic values, extending a theorem valid for Hermitian kernels.

Hildebrandt (Ann Arbor).

**Krein, M.:** Sur les équations intégrales chargées. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 24—26 (1935).

Let the kernel of the integral equation (\*)  $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) d\sigma(s) + f(x)$

be continuous and positive, while  $\sigma(s)$  is a function of bounded variation. The author states various extensions of the classical theory to the case of equation (\*). Such are the existence of characteristic values  $\{\lambda_n\}$  in case the iterated kernel  $K^2(x, s)$  is not identically zero, and of the corresponding fundamental functions  $\{\varphi_n(s)\}$  satisfying

relations  $\int_a^b \varphi_n \varphi_m d\sigma = \delta_{nm} \text{sign } \lambda_n$ , the expansions formulas for the iterated kernels

$K^r(x, s), K^r(x, s) = \sum \varphi_n(x) \varphi_n(s) \text{sign } \lambda_n / \lambda_n^r$  converging absolutely and uniformly. The

kernel  $K(x, s)$  is called absolutely closed if  $\int_a^b K(x, s) d\tau(s) \equiv 0$  whenever  $\tau(s)$  is a normalized function of bounded variation which is not a constant. For such kernels the expansion  $K(x, s) = \sum \varphi_n(x) \varphi_n(s) \text{sign } \lambda_n / \lambda_n$  is valid for all  $x, s \in E$ , where  $E$  is the



complement of the set of intervals of constancy of  $\sigma(s)$ , this series being absolutely and uniformly convergent for  $x$  and  $s$  in  $E$ . Under the same condition the number of positive (negative) characteristic values is equal to the number of points of increase of the positive (negative) variation of  $\sigma(s)$  whenever this number is finite, otherwise the number of the corresponding characteristic values is infinite. The author indicates an idea of the proof based on Grommer's theory of entire functions and of Goursat's theory of principal kernels.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Temliakow, A. A.: Lösung der singulären Integralgleichungen vom Volterraschen Typus.** Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1, 23—32 u. dtsh. Zusammenfassung 33 (1935) [Russisch].

The author discusses the equation (\*)  $\varphi(x) = \lambda \int_0^x \Phi(s/x) \varphi(s) ds/s + f(x)$  under the assumption that  $x = 0$  is a pole of order  $k$  of  $f(x)$  while the integral  $\int_0^1 \Phi(s) s^{-k} ds$  exists, and obtains a particular solution of (\*) in the form

$$\varphi(x) = \sum_{i=-k}^{\infty} a_i x^i / [1 - \lambda \int_0^1 \Phi(s) s^{i-1} ds], \quad 1/\lambda \neq \int_0^1 \Phi(s) s^{i-1} ds, \quad f(x) = \sum_{i=-k}^{\infty} a_i x^i.$$

The author shows how this solution is to be modified in case  $1/\lambda = \int_0^1 \Phi(s) s^{n-1} ds$  and discusses also the homogeneous case of (\*), when  $f(x) = 0$ . It appears that he

is not aware of the fact that a more general equation  $\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds$  has been treated in the literature (Patrick-J. Browne, Sur un problème d'inversion posé par Abel, Thesis, Paris 1913). Due to the more special form of (\*) the results of the author are somewhat more precise than those which are immediately derived from formulas of Browne.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Temliakow, A. A.: Über singuläre Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen vom Typus**  $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) f(s, \varphi(s)) ds$ . Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1, 39—44 u. dtsh. Zusammenfassung 44 (1935) [Russisch].

It is known that, under suitable restrictions on  $K$  and  $f$ , the equation of the title has a unique solution for sufficiently small  $|\lambda|$ , which vanishes when  $\lambda = 0$ . The author constructs examples to show that even when the restrictions in question are satisfied, the equation above may possess "singular" solutions for which  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(x; \lambda) = \infty$ .

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Pauc, Chr.: Résolution d'équations abstraites par un procédé d'itération.** C. R. Acad. Sci., Paris 200, 2047—2050 (1935).

The author studies the most general solutions to an equation of the form  $\varphi(X) = X$  in abstract topological spaces. Let  $\varphi$  be an operation which associates with every subset  $P$  of a space  $H$  a set  $\varphi(P)$  in  $H$  such that we have constantly (1)  $\varphi(P) \subseteq P$  or constantly (2)  $\varphi(P) \supseteq P$ . For a given subset  $M$  of  $H$ , form the transfinite sequence  $M, \varphi(M), \dots, \varphi^{(\lambda)}(M), \dots$ . The author states that the terms in this sequence become identical after a certain  $\lambda$  and, setting  $\varphi^{(\lambda)}(M) = \psi(M)$ , shows that for an arbitrary subset  $M$  of  $H$ ,  $\psi(M)$  represents the most general solution to the equation  $\varphi(X) = X$ . If  $\varphi$  is non-decreasing,  $\varphi(M)$  is the largest solution of this equation contained in  $M$  if (1) is satisfied and is the least solution containing  $M$  if (2) is satisfied. This result is applied in various Fréchet spaces to the operations of taking derived aggregates, of taking the closure, of taking the interior and of taking the intersection of a set with its derived aggregate to yield conclusions concerning closed sets, open sets, sets dense in themselves and perfect sets, particularly with reference to the existence of what the author calls the most general closed sets, open sets, perfect sets, etc., containing or contained in a given set.

*G. T. Whyburn* (Virginia).

**Taylor, A. E.:** A reduced set of postulates for abstract Hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 439—448 (1935).

The reduction is effected by demonstrating that the commutativity and associativity of addition and the distributivity and associativity of multiplication by complex numbers can be deduced from the other postulates, particularly  $(x, z) + (y, z) = (x + y, z)$  and if  $(x, x) = 0$  then  $x$  is the zero element. *Hildebrandt.*

**Lorch, E. R.:** Functions of self-adjoint transformations in Hilbert space. *Acta Litt. Sci. Szeged* **7**, 136—146 (1935).

Let  $A$  be a self adjoint or hermitian transformation on a set dense in the general Hilbert space  $\mathfrak{H}$ , and  $E(\lambda)$  be the resolution of the identity corresponding to  $A$ .  $E(a, b) = E(b) - E(a)$  defines a linear closed manifold  $M(a, b)$  of  $\mathfrak{H}$  corresponding to the half open interval  $a < \lambda \leq b$ . If  $G$  is any open set in  $\lambda$ , then the corresponding manifold  $M(G)$  of  $\mathfrak{H}$  is defined as the smallest linear closed manifold containing all  $M(a, b)$  corresponding to intervals  $(a, b)$  lying in  $G$ . The exterior measure of any set  $F$  in  $\lambda$  relative to  $E(\lambda)$  is  $\prod M(G_\alpha)$  where  $G_\alpha$  is any open set containing  $F$ . A set  $F$  is measurable relative to  $E(\lambda)$  if the exterior measure of  $F$  and that of  $C F$  are orthogonal to each other. If the real valued function  $g(\lambda)$  is measurable relative to  $E(\lambda)$

the definition of the transformation  $g(A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) dE(\lambda)$  is obvious. The author proves that if  $g$  is measurable relative to  $E$ ,  $g(A)$  is bounded on the right by  $N$  if and only if  $g(\lambda) \leq N$  except for a set of zero measure relative to  $E$ ,  $g(A)$  is commutative with every transformation commutative with  $A$ ,  $g(A)$  is a projection if and only if  $g(\lambda) = 0$  or 1 except at a set of zero measure relative to  $E$ . Further  $\int g dE$  is additive and multiplicative relative to  $g$  measurable with respect to  $E$  for elements of  $\mathfrak{H}$  for which the corresponding transformations are effective. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Neumann, J. von:** On normal operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **21**, 366 bis 369 (1935).

For a bounded operator  $A$  in Hilbert space ( $A^*$  denotes its adjoint) normalcy means:  $AA^* = A^*A$ . This definition does not extend easily to the case of unbounded operators. In this case the author's definition was as follows [*Math. Ann.* **102**, 370 (1929)]. If  $M$  is any set of operators,  $M'$  is the set of all bounded  $A$  for which  $A$  and  $A^*$  commute with every  $R$  from  $M$ .  $M'$  always consists of bounded operators, and if  $M$  consist of closed operators then  $M'$  is a ring. Thus  $M''$  is always a ring. Now an operator  $R$  that is closed or has a closed extension was called normal if  $(\alpha)$  the ring  $(R)''$  is Abelian, and  $(\beta)$  the domains of  $R$  and  $R^*$  have an everywhere dense intersection. — In the present note the author shows (employing the method of his paper: Über adjungierte Funktionaloperatoren; see this Zbl. **4**, 216) that condition  $(\beta)$  is a consequence of condition  $(\alpha)$ . *Bochner* (Princeton).

**Riesz, Frédéric:** Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert. *Acta Litt. Sci. Szeged* **7**, 147—159 (1935).

This paper gives a new proof of the result of v. Neumann, that a necessary and sufficient condition that a hermitian transformation  $B$  be expressible in the form

$(Bf, f) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} J(\lambda) dE(\lambda) f, f \right)$  where  $E(\lambda)$  is the resolution of the identity corresponding to the bounded hermitian transformation  $A$  on Hilbert space  $\mathfrak{H}$ , is that  $B$  be commutative with all transformations which are commutative with  $A$ . — Defining  $B(\lambda) = E(\lambda)B = BE(\lambda)$ , the author proves that  $d(B(\lambda) f, f)/d(E(\lambda) f, f)$  exists and is independent of  $f$  except for a set of zero measure, a property valid for

$$(B(\lambda) f, f) = \left( \int_{-\infty}^{\lambda} F(t) dE(t) f, f \right) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dE(\lambda) E(t) f, f \right).$$

Extension to unbounded transformations is indicated. *Hildebrandt* (Ann Arbor).



**Bernstein, Vladimiro:** Sulla trasformazione di Hurwitz e sui funzionali lineari misti. Mem. Accad. Ital. 6, 521—599 (1935).

L'A. établit des théorèmes généraux indiquant des cas où les points qui (d'après le théorème de Hurwitz) sont les seules singularités possibles de la transformée de Hurwitz de deux fonctions données, sont effectivement singuliers. — En posant

$$s_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}, \quad a(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \quad b(z) = \sum_0^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}, \quad s(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}},$$

$$A(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n!}, \quad B(z) = \sum \frac{b_n z^n}{n!}, \quad S(z) = \sum \frac{s_n z^n}{n!},$$

$$H_F(\psi) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\log |F(z e^{i\psi})|}{z} \quad (F = A, B, S),$$

et en désignant par  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  les plus petits domaines convexes à l'extérieur desquels  $a(z)$  et  $b(z)$  sont respectivement holomorphes et par  $C$  l'ensemble des points dont les affixes peuvent être mis sous la forme d'une somme d'un affixe d'un point de  $\mathfrak{A}$  et de celui d'un point de  $\mathfrak{B}$ , les théorèmes de l'auteur peuvent être divisés en deux catégories: 1° Des théorèmes permettant d'affirmer qu'un point  $\zeta_0$  de  $C$  est certainement singulier pour  $s(z)$ , les conditions s'exprimant par une relation entre les trois fonctions  $H_S, H_A, H_B$  correspondant à une valeur  $\psi$  liée à  $\zeta_0$ ; 2° dans ce type de théorèmes on indique des points de  $C$  comme étant nécessairement singuliers de  $s(z)$ , à condition qu'ils soient obtenus à partir de points de la frontière de  $\mathfrak{A}$  jouissant de quelques propriétés particulières. L'A. construit, d'autre part, des exemples tels que  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  soient des espaces lacunaires respectivement pour  $a(z)$  et  $b(z)$ ,  $s(z)$  pouvant cependant être prolongée à travers toute la frontière de  $C$ . L'A. applique ses résultats aux fonctionnelles analytiques de M. Fantappié. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

### Funktionentheorie:

**Kerékjártó, Béla:** Sur l'indice des transformations analytiques. Mat. természett. Értes. 53, 407—418 u. franz. Zusammenfassung 419 (1935) [Ungarisch].

Vgl. dies. Zbl. 11, 407.

**Beurling, Arne:** Sur les fonctions limites quasi analytiques des fractions rationnelles. (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 199—210 (1935).

L'A. démontre en particulier le théorème suivant: Posons  $f(z) = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{A_{\nu}}{z - a_{\nu}}$ ,  $r_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_{\nu}|$ ,  $E_f$  — l'ensemble où la série  $\sum \frac{|A_{\nu}|}{\sqrt[r_{\nu}-1]} \frac{1}{|z - a_{\nu}|}$  converge. Si  $f(z) = 0$  sur un ensemble fermé  $E$  contenu dans  $E_f$ , et tel que la borne inférieure de la longueur totale de tous les ensembles dénombrables des courbes le renfermant est positive et si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r_n} < 1$ , alors tous les  $A_{\nu}$  sont nuls. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Kobayashi, Zen-ichi:** On the type of Riemann surfaces. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 217—233 (1935).

Eine vom Verf. angegebene Methode (dies. Zbl. 11, 169) wird auf Riemannsche Flächen mit lauter logarithmischen Windungspunkten über  $q (> 2)$  Grundpunkten angewendet. Dieser Fall bietet nichts Neues gegenüber dem von Nevanlinna behandelten Fall  $q = 3$ . L. Ahlfors (Helsingfors).

**Ozaki, Shigeo:** Some remarks on the univalence and multivalence of functions. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 41—55 (1934).

1. L'auteur montre que si les coefficients de  $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + \dots + a_n z^n + \dots$  satisfont à  $|a_1| r^2 + \dots + n |a_n| r^{n+1} + \dots \leq 1$ ,  $f(z)$  est méromorphe et univalente pour  $|z| < r$ . Cette condition suffisante est en outre nécessaire si  $a_n \geq 0$  pour

$n = 1, 2, \dots$  Il en déduit des caractères d'univalence en comparant une fonction  $f(z)$  de la forme indiquée à une autre de même forme dont les coefficients positifs majorient ceux de  $f(z)$ . Les démonstrations reposent sur la considération de  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ , sur l'inégalité  $|f'(z)| > 0$  et sur l'inégalité de Schwarz. — 2. L'auteur montre que si  $F(z) = b_0 + b_1 z + \dots$  est holomorphe pour  $|z| \leq r$ , si  $\Re[e^{i\alpha} z F'(z)/F(z)] > 0$  pour  $|z| = r$  ( $\alpha$  constante réelle donnée) et si  $F(z)$  s'annule  $k$  fois pour  $|z| < r$ , la valence de  $F(z)$  dans ce cercle est égale à  $k$ . Il donne des propositions analogues pour des fonctions méromorphes ayant un pôle d'ordre  $k$  à l'origine et des conséquences telles que: si les coefficients de  $\Phi(z) = \frac{1}{z^k} + \dots + a_n z^n + \dots$  vérifient l'inégalité  $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{k+p+n-1}{k+p} |a_{n+p}| r^{k+p+n} \leq 1$ ,  $\Phi(z)$  est holomorphe pour  $0 < |z| < r$  et de valence  $k+p$  au plus. Certains des résultats sont à rapprocher de ceux de Itihara (v. ce Zbl. 7, 303). G. Valiron (Paris).

**Ozaki, Shigeo: On the multivalency of functions.** Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 99—102 (1934).

L'auteur montre que, si  $f(z)$  est holomorphe pour  $|z| \leq 1$  et si

$$\int_0^{2\pi} \left| 1 + \Re \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right| d\theta < 2(k+1)\pi, \quad \text{pour } z = e^{i\theta},$$

la valence de  $f(z)$  est au plus  $k$  pour  $|z| \leq 1$ . Il en déduit que si les coefficients de  $f(z) = z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots$  vérifient la condition

$$k(p-k+1) \geq \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n+p-1) |a_n| r^{n-k}, \quad (k \leq p)$$

$f(z)$  est holomorphe et de valence  $p$  au plus pour  $|z| < r$ . Pour  $p = 1$ , l'auteur compare son résultat à celui de J. W. Alexander [Ann. of Math. 17 (1915)] et pour  $k = p$  à celui qu'il a obtenu précédemment (voir le réf. précédent). G. Valiron (Paris).

**Ozaki, Shigeo: On the theory of multivalent functions.** Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 167—188 (1935).

L'auteur montre que  $f(z)$  étant holomorphe dans un domaine convexe  $D$ ;  $z, a_1, \dots, a_n$ , étant  $n+1$  points de ce domaine et  $\alpha$  une constante réelle, on a

$$\Re[e^{i\alpha} f_n(z, a_n, \dots, a_1)] = \Re \left[ e^{i\alpha} \frac{f^{(n)}(z')}{n!} \right], \quad (1)$$

$z'$  appartenant au domaine convexe minimum contenant  $z, a_1, \dots, a_n$ ;  $f_n$  étant définie par

$$f_1(z, a_1) = \frac{f(z) - f(a_1)}{z - a_1}, \dots, f_n(z, a_n, \dots, a_1) = \frac{f_{n-1}(z, a_{n-1}, \dots, a_1) - f_{n-1}(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)}{z - a_n}.$$

Comme  $f_k(z_0, z_1, \dots, z_k) = \sum_0^k \frac{f(z_i)}{g'(z_i)}$ ,  $\left[ g(z) = \prod_0^k (z - z_i) \right]$ , s'exprime par le quotient

de deux déterminants, on obtient une extension de la formule de la moyenne. De (1) découle qu'une fonction  $f(z)$  méromorphe dans un domaine convexe y a une valence au plus égale à  $k$  si  $\Re[e^{i\alpha} f^{(k)}(z)]$  y reste positif. Pour  $k = 1$  ce résultat fut donné par Noshiro (v. ce Zbl. 10, 263) et obtenu par divers auteurs à la suite de la publication d'une note de Wolff (v. ce Zbl. 8, 363). L'auteur en déduit notamment que si  $\Phi(z)$  est holomorphe dans  $|z| < 1$  et représente ce cercle sur un domaine étoilé et si  $f(z)$  étant holomorphe pour  $|z| < 1$ , on a  $\Re \left[ e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{\Phi(z)} \right] > 0$ ,  $f(z)$  est

univalente dans  $|z| < 1$ . En prenant pour  $\Phi(z)$ :  $\frac{z}{1-z}$ ,  $\frac{z}{(1-z)^2}$ ,  $\frac{z}{1-z^2}$ , il en tire des conditions suffisantes d'univalence d'une fonction donnée par son développement de



Taylor. — Ozaki dit qu'une  $f(z)$  est absolument  $k$  valente de la classe  $p$  dans  $D$  si toutes les fonctions  $f(z) + c_{-p}z^{-p} + \dots + c_{k-p-1}z^{k-p-1}$ , où les  $c_i$  sont arbitraires, sont méromorphes et au plus  $k$  valentes dans  $D$ . Si  $f(z)$  est méromorphe dans un domaine convexe  $D$ , il suffit que dans  $D$ ,  $\Re \left[ e^{i\alpha} \frac{d^k}{dz^k} \{z^k f(z)\} \right] > 0$ ,  $k-1 \geq p \geq 0$ ,  $\alpha$  réel, pour que  $f(z)$  soit absolument  $k$  valente de la classe  $p$  dans  $D$ . En prenant pour  $D$  un cercle  $|z| < r$  et  $f(z) = a_{-p}z^{-p} + \dots + a_n z^n + \dots$ , l'auteur obtient des critères d'absolue valence d'ordre  $p$  de la forme de ceux donnés dans le premier des travaux précédents.

G. Valiron (Paris).

Visser, Cornelis: Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 402—411 (1935).

Ausführliche Darstellung des Beweises für die in C. R. 199, 924 (dies. Zbl. 10, 120) angezeigte notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Winkel-derivierten einer Funktion  $w = w(z)$  in  $z = \infty$ , die die Halbebene  $\Re z > 0$  auf ein in  $\Re w > 0$  gelegenes einfach zusammenhängendes Gebiet konform so abbildet, daß  $z = \infty$   $w = \infty$  „entspricht“. Darüber hinaus wird eine spezielle Form dieser Bedingung für Gebiete angegeben, die symmetrisch zur reellen Achse liegen. Warschawski.

Visser, C.: Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 411—414 (1935).

Ein neuer, vereinfachter Beweis für den folgenden Satz von W. Seidel (Math. Ann. 104, 217; dies. Zbl. 1, 19) wird angegeben: Es sei  $G$  ein von einer geschlossenen Jordankurve  $C$  berandetes Gebiet.  $C$  habe die Eigenschaft, daß ein Kreis vom festen Radius  $\rho > 0$  sich längs  $C$  von innen und außen „abrollen“ läßt. Bildet  $w = f(z)$  den Kreis  $|z| < 1$  konform auf  $G$  ab, so ist  $f'(z)$  in  $|z| \leq 1$  vorhanden und stetig.

S. Warschawski (Ithaca, N.Y.).

Ostrowski, Alexander: Über den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches. Acta math. 64, 81—184 (1935).

The following important contribution to the study of the correspondence of boundaries in conformal representation is based on some notions concerning the boundary of a region. Let the boundary of a simply connected region  $G$  contain a free Jordan arc in the neighborhood of a boundary point  $P$ . Let  $S_1, S_2$  be two segments issuing from  $P$  and, except for  $P$ , lying in  $G$ . Let  $A$  be a triangle with vertex at  $P$  situated between  $S_1$  and  $S_2$  and possessing in common with  $S_1, S_2$  only the point  $P$ . Such a triangle is called a triangular neighborhood of  $P$  in  $G$ . A union of a finite number of triangular neighborhoods of  $P$  in  $G$  is called an angular neighborhood of  $P$  in  $G$ . A point  $z$  of  $G$  which converges to  $P$  while remaining within an angular neighborhood of  $P$  is said to converge angularly to  $P$ . Let  $I(z = z(t), 0 \leq t \leq 1)$  be a Jordan arc.  $I$  is said to possess in  $z(0)$  a tangent  $\tau$  if to every angle with vertex at  $z(0)$  and bisector  $\tau$  there corresponds a  $\delta > 0$  so that all points  $z(t)$  with  $0 < t < \delta$  lie within the angle. If, furthermore, to every  $\varepsilon$  there corresponds a  $\delta > 0$  so that the direction of all chords of the arc  $0 \leq t \leq \delta$  of  $I$  form an angle  $\leq \varepsilon$  with the direction  $\tau$ , then  $I$  is said to possess an  $L$ -tangent at  $z(0)$ . If the boundary of  $G$  in the neighborhood of a boundary point  $P$  consists of two Jordan arcs  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  having only  $P$  in common and possessing in  $P$  the tangents  $\tau_1$  and  $\tau_2$  respectively, then the boundary of  $G$  is said to have a corner at  $P$  of opening equal to the angle between  $\tau_1$  and  $\tau_2$ . The author proves the following results: Let  $w = f(z)$  map conformally a simply connected region  $G_1$  in the  $z$ -plane on a simply connected region  $G$  of the  $w$ -plane. The boundary of  $G_1$  possesses a corner of opening  $\gamma_1$  ( $0 < \gamma_1 \leq 2\pi$ ) in a point  $z_0$ . In the corresponding boundary point  $w_0$  the boundary of  $G$  possesses a corner of opening  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ). Then, (a)  $f'(z) \left( \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \right) = 1 + (z - z_0)g'(z)$ , where  $(z - z_0)g'(z) \rightarrow \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_1}$  and  $f'(z) \left( \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \right) \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1}$  for  $z \rightarrow z_0$ , the approach from the interior of  $G_1$  being angular. (b) If  $\gamma > 0, \gamma_1 > 0$ , then  $\arg \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} = \left( \frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \arg(z - z_0) + c + \varepsilon(z - z_0)$ ;  $\arg f'(z) = \left( \frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 \right) \arg(z - z_0) + c + \varepsilon_1(z - z_0)$ , where  $c$  is a constant while  $\varepsilon(z - z_0)$  and  $\varepsilon_1(z - z_0)$  tend to zero when  $z$  approaches  $z_0$  angularly from the interior of  $G_1$ . (c)  $\frac{\log |f(z) - w_0|}{\log |z - z_0|} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1}$ ,  $\gamma \geq 0$ , and for  $\gamma > 0$   $\frac{\log |f'(z)|}{\log |z - z_0|} \rightarrow \frac{\gamma}{\gamma_1} - 1$ , the approach  $z \rightarrow z_0$  being taken angularly. (d) Let  $D$  be an angular neighborhood of  $z_0$  in  $G_1$  and  $\gamma > 0, \gamma_1 > 0$ . If  $z_1, z_2$  ( $z_1 \neq z_2$ )

is a pair of points in  $D$ , then  $\frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \sim \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma_1}}$  and  $\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \sim \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1}$ , when  $z_1$  and  $z_2$  tend to  $z_0$  in  $D$  provided that  $\left|\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}\right|$  stays between two positive constants.

If, however,  $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow 0$  or  $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \rightarrow \infty$ , then  $\frac{f(z_1) - w_0}{f(z_2) - w_0} \rightarrow 0$  and  $\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \rightarrow \infty$ , respectively. (e) If  $\gamma = \gamma_1 > 0$ ,  $D$  is an angular neighborhood of  $z_0$  in  $G_1$ ,  $z_1, z_2$  ( $z_1 \neq z_2$ ) is a pair of points in  $D$ ,  $w_1$  and  $w_2$  the image points of  $z_1, z_2$  in  $G$ , and  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \beta_0, \beta_1, \beta_2$  are the respective angles of the triangles  $z_0, z_1, z_2; w_0, w_1, w_2$ , then if  $z_1, z_2$  converge to  $z_0$ ,  $\beta_0 - \alpha_0 \rightarrow 0$ ,  $\beta_1 - \alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\beta_2 - \alpha_2 \rightarrow 0$ . Various corollaries of these results are deduced, among them the following: Under the hypotheses of (d) for any integer  $\nu > 0$   $(z - z_0)^\nu \frac{f^{(\nu+1)}(z)}{f'(z)} \rightarrow \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 2\right) \dots \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - \nu\right)$  for angular approach  $z \rightarrow z_0$ . The above results are all stated for angular approach  $z \rightarrow z_0$ . Many of them hold, however, for unrestricted approach  $z \rightarrow z_0$  provided that one assumes that the four tangents at the two corners  $z_0, w_0$  are also  $L$ -tangents. The proof of these facts depends on an extension of the notion of tangent at a boundary point of a region to that of a Grenzstütze of a curve analogous to the extension of the notion of derivative to that of derivative numbers. If the Grenzstützen at  $z_0$  and  $w_0$  differ only by a small angle from the sides of certain angles of opening  $\gamma$  and  $\gamma_1$ , then  $f'(z) \left( \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} \right)$  differs only slightly from  $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ . This leads to a new proof of a well-known theorem of Lindelöf on the mapping of regions whose boundaries possess  $L$ -tangents. In these developments use is made of some results of interest in themselves. Two examples of this may suffice. Let  $\chi(\vartheta)$  be a summable function in

$(-\pi, \pi)$  for which  $\frac{1}{\vartheta - \vartheta_0} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \chi(\vartheta) d\vartheta \rightarrow \chi(\vartheta_0)$ ,  $\vartheta \rightarrow \vartheta_0$ . Then for the  $n$ -th derivative  $f^{(n)}(z)$

of the function  $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta$  the relation  $(z - z_0)^n f^{(n)}(z) \rightarrow 0$  holds for angu-

lar approach  $z \rightarrow z_0$  from the interior of the circle  $|z| < 1$ . Another result is this: Let  $f(z) = U(z) + iV(z)$  be a regular analytic function in  $|z| < 1$  whose real part  $U(z)$  satisfies the condition  $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 |U(re^{i\vartheta})| r dr d\vartheta < \infty$ . The imaginary part  $V(z)$  converges to a

function  $\chi(\vartheta)$  when  $z$  converges in any manner toward  $e^{i\vartheta}$  for all  $\vartheta$  except perhaps  $\vartheta = \vartheta_0$ . The function  $\chi(\vartheta)$  is continuous for all  $\vartheta$ , except perhaps  $\vartheta = \vartheta_0$  and is uniformly bounded on

$|z| = 1$ . Then  $f(z)$  is of the form  $f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \chi(\vartheta) d\vartheta + h(z)$ ,  $h(z) = iu \frac{e^{i\vartheta_0} + z}{e^{i\vartheta_0} - z} + v$ ,

where  $u$  and  $v$  are constants. The author concludes with a study of the case  $\gamma = 0$ . Thus, the first of the relations (b) remains true in this case. If tangents are replaced by  $L$ -tangents, then the second of these relations also holds for  $\gamma = 0$  with arbitrary approach  $z \rightarrow z_0$ . On the other hand the relation fails for ordinary corners. Further results in this direction are obtained.

W. Seidel (Cambridge, Mass.).

**Bergmann, Stefan:** Sur une méthode effective de la représentation conforme avec application à un problème de l'hydrodynamique. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 1, 69—74 (1935).

A short account (without proofs) of investigations due to the author and to several other writers concerning a method of conformal mapping of a domain  $B$  based on the theory of some special sets of orthogonal functions associated with  $B$  and of "natural" curvilinear coordinates invariant under conformal transformations. The article contains several bibliographical references.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

● **Deuren, Pierre van:** La théorie des probabilités. (Leçons sur le calcul des probabilités. Tome 1.) Paris: Gauthier-Villars & Cie. et Namur: A. Wesmael-Charlier, S. A. 1935. XVII, 546 pag. geb. Frs. 100.—.

Wie der Verf. in der Vorrede mitteilt, hat er in 30 Unterrichtsjahren beständig in theoretischer und didaktischer Hinsicht an der Vervollkommenung seiner Vorlesungen gearbeitet,



zu deren Veröffentlichung er sich jetzt entschlossen hat. Das Ergebnis ist eine sehr lebendige und originelle Darstellung, die sich in vieler Hinsicht von den klassischen Vorbildern unterscheidet. — Das Werk ist in 11 Bücher eingeteilt, von denen 6 den theoretischen Teil enthalten und den ersten Band bilden. Die anderen 5 werden einen zweiten, den Anwendungen (Statistik, Fehlerrechnung, vom Zufall abhängige Operationen, Lebensversicherung, Ballistik) gewidmeten Band bilden. Das 1. Buch (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen) enthält die fundamentalen Begriffe und Prinzipien. Bemerkenswert sind u. a. die Rechtfertigung des Satzes über zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten und die Definition der mittelbaren Unabhängigkeit. Für die Begriffe Ereignis, Möglichkeit, Abhängigkeit usw. werden klare Definitionen gegeben. Die Definition der Wahrscheinlichkeit vermittelt des Begriffes der „Symmetrie“ und des „Prinzips der Summe“ scheint dem Ref. ein interessanter, wenn auch nicht vollständig gelungener Versuch. Es wäre, um volle Strenge zu erreichen, erforderlich, einige implizite Axiome ausdrücklich auszusprechen. — Das 2. Buch (Wahrscheinlichkeit der Veränderlichen) überträgt die Resultate auf das Gebiet der Zufallsveränderlichen und behandelt in übersichtlicher Weise die Transformationen der Veränderlichen. Um sich systematisch auf die Wahrscheinlichkeitsdichte stützen zu können, beschränkt sich der Verf. jedoch auf die stetigen Verteilungen. Auffällig ist, daß der Verf. die Wahrscheinlichkeitsdichte („taux“) als von ihm neueingeführt zu betrachten scheint. — Das 3. Buch behandelt organisch die Theorie der Momente. Hervorzuheben wäre die Einführung einiger neuer Invarianten und der Unabhängigkeitsindizes (jedoch sei bemerkt, daß im Fall zweier Veränderlicher  $d_{xy}$  dem nicht erwähnten Korrelationskoeffizienten  $r_{xy}$  vermöge der Beziehung  $d_{xy}^2 = 1 - r_{xy}^2$  äquivalent ist). — Das 4. Buch (praktische Wahrscheinlichkeiten) erörtert in klarer Weise die Angleichung von „sehr wahrscheinlich“ und „gewiß“, indem die Grenzen der Zulässigkeit dieses Übergangs aufgezeigt werden. Bei den weiteren Entwicklungen wäre es wohl empfehlenswerter, sie als bloße Annäherungsrechnungen darzustellen, ohne dem „Modul“  $p_0$  eine etwas zu sehr betonte Bedeutung beizulegen. — Das 5. Buch („konzentrierte Veränderliche“) beschäftigt sich in einheitlicher Weise mit verschiedenartigen Problemen, die gewöhnlich voneinander getrennt betrachtet werden. Unter diesen befindet sich vor allem die Methode der kleinsten Quadrate, die ohne Heranziehung der Gaußschen Verteilung gerechtfertigt wird. Die Sätze auf S. 291 und 293 sind ungenau. — Das 6. Buch (Theorie der Mittelwerte) behandelt zum Teil auf Grund neuer Resultate diejenigen Zufallsvariablen, die als Mittelwert von  $n$  anderen Zufallsvariablen gebildet werden, und geht besonders auf den asymptotischen Fall eines sehr großen  $n$  ein. — Für die grundsätzliche Auffassung des Verf. bedeutsam sind zwei Anhänge über unbestimmte Wahrscheinlichkeiten und über den objektiven Wert der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in denen er zeigt, wie die theoretische Mangelhaftigkeit der a priori unbestimmten Wahrscheinlichkeiten keineswegs der Wahrscheinlichkeitsrechnung jeden Wert nimmt, ja sogar praktisch belanglos ist.

Bruno de Finetti (Trieste).

Hempel, Carl G.: Über den Gehalt von Wahrscheinlichkeitsaussagen. Erkenntnis 5, 228—260 (1935).

Reichenbach, Hans: Bemerkungen zu Carl Hempels Versuch einer finitistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Erkenntnis 5, 261—266 (1935).

Hempel bemerkt, daß die Häufigkeitslimesdeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nie irgendeiner Wahrscheinlichkeitsaussage einen empirischen Gehalt verleihen kann. Unter diesem Gesichtspunkte des empirischen Gehaltes prüft er die Theorien v. Mises' und Reichenbachs und vergleicht das Verhältnis zwischen „axiomatischer Formulierung“ und „inhaltlicher Deutung“ in den erwähnten Theorien einerseits und in den anderen Wissenschaften — insbesondere in der Geometrie — andererseits. Der Verf. empfiehlt, eine finitistische Häufigkeitsdeutung an die Stelle der Häufigkeitslimesdeutung zu setzen, und zeigt, wie eine solche Auffassung mit konkretem Inhalt erfüllt werden kann: nämlich durch die mehr oder minder befriedigende Bewährung der W.-Aussagen auf Grund finitistischer Kontrollfolgen, genau so, wie es in jeder anderen Wissenschaft hinsichtlich der empirischen Bewährung irgendwelcher Hypothesen der Fall ist. — Reichenbach entgegnet, daß sich eine derartige Bewährung auf den Induktionsschluß gründet, der durch die W.-Lehre eben erst zu erklären und zu rechtfertigen wäre; während also H. das Induktionsprinzip in der W.-Lehre ablehnt, führt er es später dann doch wieder als Voraussetzung für jede Theorie ein, die W.-Theorie selbst inbegriffen; somit gibt er dem Problem des Induktionsschlusses nur eine andere, nicht zweckmäßige sprachliche Einkleidung. „Die Anwendbarkeit der W.-Rechnung läßt sich selbst wieder nur mit Wahrscheinlichkeit behaupten.“

Bruno de Finetti (Trieste).

**Fortet, Robert:** Sur des probabilités en chaîne. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 184 bis 186 (1935).

L'auteur considère des probabilités en chaîne dans le cas où il y a une infinité dénombrable d'événements possibles. Il s'agit donc d'un système des quantités  $P_{ik}^n$  satisfaisant aux conditions:  $P_{ik}^n \geq 0$ ,  $\sum_k P_{ik}^n = 1$ ,  $P_{ik}^{m+n} = \sum_j P_{ij}^m P_{jk}^n$ . Soient plus loin  $P_k^n = \sup_i P_{ik}^n$ ,  $p_k^n = \inf_i P_{ik}^n$ . On démontre qu'il existe pour  $n \rightarrow \infty$  une limite  $P_k = \lim P_k^n$  aussi que  $p_k = \lim p_k^n$ . On a suivant l'auteur le cas régulier, si l'un au moins des  $p_k$  est positif. En adaptant à ce cas des méthodes indiquées dans divers Mémoires de Fréchet l'auteur démontre des théorèmes suivants: II. Dans le cas régulier  $P_k = p_k$  et  $P_{ik}^n$  tend avec  $n \rightarrow \infty$  uniformément en  $i$  vers  $P_k = p_k$ . IV. Dans le cas régulier  $\sum_k P_k = 1$ . A. Kolmogoroff (Moskau).

**Onicescu, Octav, et Gheorghe Mihoc:** Sur les chaînes de variables statistiques. Bull. Sci. math., II. s. **59**, 174—192 (1935).

Une chaîne simple de Markoff est formée par une suite indéfinie de variables aléatoires  $u^{(1)}, u^{(2)} \dots$  dont chacune peut prendre une des valeurs  $a_1, a_2 \dots a_m$  sous l'hypothèse suivante: la probabilité  $p_i^{(n+1)}$  pour que l'on ait  $u^{(n+1)} = a_i$  dépend de la valeur que prend effectivement la variable  $u^{(n)}$ . — L'auteur considère le cas (qu'il regarde comme plus général) où  $p_i^{(n+1)}$  dépend non seulement de la valeur que prend  $u^{(n)}$  effectivement mais aussi des probabilités  $p_i^{(m)}$  ( $i = 1, 2 \dots m$ ). Il étudie les propriétés asymptotiques (pour  $n$  infini) des quantités qui dépendent de ces probabilités et il donne des indications sur quelques problèmes voisins. B. Hostinsky (Brno).

**Fréchet, M.:** Sull'espressione esatta di uno scarto medio. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 164—169 (1935).

Bertrand hat in seinem „Calcul des Probabilités“ einen asymptotischen Ausdruck für die durchschnittliche Abweichung  $\mathfrak{M}(|f - p|)$  zwischen Wahrscheinlichkeit und Frequenz für den Bernoullischen Fall gegeben. Der Verf. nimmt die elegante Rechenmethode von Bertrand wieder auf und zeigt, daß sie gestattet, den exakten Ausdruck für  $\mathfrak{M}(|f - w|)$  zu geben, bei beliebigem  $w$ . Insbesondere wird der Fall betrachtet, daß  $w$  der Medianwert von  $f$  ist; dies ist der Fall, wo die durchschnittliche Abweichung am kleinsten wird, und daher sollte, wie der Verf. betont, unter „durchschnittlicher Abweichung“ ohne weiteren Zusatz die vom Medianwert verstanden werden. Bruno de Finetti (Trieste).

**Tricomi, F.:** Su la rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss e la trasformazione di Laplace. Giorn. Ist. Ital. Attuari **6**, 135—140 (1935).

Die Frage, ob es möglich ist, eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung als lineare Kombination Gaußscher Verteilungsfunktionen darzustellen, ist umstritten. Der Verf. führt das Problem zurück auf das der Umkehrung der „zweiseitigen“  
 $\left( \text{d. h. mit } \int_{-\infty}^{+\infty} \text{ anstatt } \int_0^{+\infty} \right)$  Laplacetransformation und gelangt so, unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen, zu einer Lösung in bejahendem Sinne, wobei er Verfahren zur tatsächlichen, auch numerischen Durchführung der Lösung angibt. Man kommt jedoch so zu linearen Kombinationen mit Gewichten von beliebigen Vorzeichen, während es dem Ref. scheint, daß das Problem nur dann Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat, wenn man nur wesentlich positive Gewichte in Betracht zieht. Bruno de Finetti (Trieste).

**Wicksell, S. D.:** Expansions of frequency functions for integer variates in series. (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 306—325 (1935).

The author starts with two sequences  $(y_x)$  and  $(u_x)$  ( $x = 0, 1, \dots$ ), the terms of each representing probabilities of alternative events, either or both of the sequences being terminating. The expansion of  $u_x$  as a series in the successive differences of  $y_x$  is shown to have as coefficients those of the ratio of the corresponding Laplacian generating



functions, when expanded as a formal power series in  $1 - t$ . The author shows that the former converges if the latter has a radius of convergence greater than unity. The factorial moments  $m_{(n)} = \sum_x u_x x(x-1) \dots (x-n+1)$  lead to factorial cumulants analogous to the seminvariants or cumulants of Thiele, and these provide a second method of obtaining the coefficients. The so-called *B-series* of Charlier provide a known instance of the general method although even here the expression in terms of factorial moments seems new. The special case of the Bernoullian point binomial expanded in terms of the Poisson limit, introduces a system of relative orthogonal polynomials whose properties are studied further. Finally the author expands a point-binomial, a hypergeometric probability function and the general Poisson distribution function (for integers) in terms of a given point-binomial and its differences.

*Albert A. Bennett* (Providence).

**Kirkham, W. J.: Moments about the arithmetic mean of a binomial frequency distribution.** *Ann. math. Statist.* **6**, 96—101 (1935).

**Romanovsky, V.: Sui momenti della distribuzione ipergeometrica.** *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **6**, 170—177 (1935).

Die sog. hypergeometrische Verteilung, definiert durch die Formel  $p_h = \binom{h}{sp} \binom{h}{sq} : \binom{n}{s}$ , stellt bekanntlich die Wahrscheinlichkeiten dar,  $h = 0, 1, 2, \dots, n$ , weiße Kugeln zu erhalten, wenn man gleichzeitig  $n$  Kugeln aus einer Urne zieht, die  $s$  Kugeln, und zwar  $sp$  weiße und  $sq$  schwarze enthält. Der Verf. gibt ein Verfahren zur Berechnung der Momente dieser Verteilung an und entwickelt einen Algorithmus, der es gestattet, die erforderlichen Rechenoperationen klarer zu übersehen.

*Bruno de Finetti* (Trieste).

**Wilks, S. S.: On the independence of  $k$  sets of normally distributed statistical variables.** *Econometrica* **3**, 309—326 (1935).

The background of this paper is found in the development of a multivariate analysis in which  $n$  variables are classified into mutually exclusive categories which are to be studied not only with respect to relations within classes but with special reference to relations from class to class. — A criterion,  $\lambda_I$ , is developed for testing the mutual independence of  $k$  sets of normally distributed variables. The criterion is derived like a Neyman-Pearson  $\lambda$  ratio by the use of principle of maximum likelihood. The  $\lambda_I$  is expressed as the quotient of the determinant of the correlation coefficients of the set of  $n$  variables by the product of the determinants of the correlation coefficients within the  $k$  subsets. — Analytical and geometrical properties of  $\lambda_I$  are shown to support its validity as a test of the independence of the  $k$  sets of variables. The sampling distribution of  $\lambda_I$  has been found under the assumption that the  $k$  sets are independent in a population, and the probability integrals have been evaluated for several of the simpler cases. — The sampling theory of  $\lambda_I$  holds for deviations of variables from regression functions, provided proper account is taken of the decrease in degrees of freedom. The numerical application of the theory is illustrated by an example in psychological measurements involving two groups of variables. *H. L. Rietz.*

**Derksen, Y. B. D.: Note on a remark of D. J. Struik on correlation coefficients.** *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 394—398 (1935).

Referring to the dualism pointed out by D. J. Struik (*Bull. Amer. Math. Soc.* **36**, 869—878), this paper shows, given a scatter diagram in  $n$ -space, how to set up another in  $n$ -space whose total correlation coefficients are the negatives of the partial correlation coefficients of the first and vice versa. It is further shown that a partial correlation of the  $p$ -th order may be considered to be the dual of another of the  $(n-p-2)$ -th order, which generalization includes the first theorem and also a proof of the well-known formulae for calculating partial correlation coefficients of order  $n-2$  in terms of those of order  $n-3$ .

*C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

**Hendricks, Walter A.:** A problem involving the Lexis theory of dispersion. *Ann. math. Statist.* **6**, 78—82 (1935).

On the hatch ability of fertile eggs.

*H. Wold* (Stockholm).

**Kullback, Solomon:** A note on the analysis of variance. *Ann. math. Statist.* **6**, 76 bis 77 (1935).

**Berger, Alfred:** Zur Anwendung der partiellen Summation in der Versicherungsmathematik. *Assekuranz-Jb.* **54**, 3—12 (1935).

Durch Anwendung der partiellen Summation werden ohne jede Rechnung die beiden Relationen bewiesen:

$$\begin{aligned} a_{x\overline{n}}\{r_k\} &= A_{x\overline{n}}\{r^{k+1} \cdot a_{\overline{k+1}}\{r_i\}\}, \\ A_{x\overline{n}}\{A_{k+1}\} &= a_{x\overline{n}}\{\Delta A_k - d \cdot A_{k+1}\}, \quad \Delta A_k = A_{k+1} - A_k. \end{aligned}$$

Diese Relationen sind das diskontinuierliche Gegenstück zu den vom Verf. in *Aktuär. Vědy* **4**, 145—153 (1934) angegebenen Relationen der kontinuierlichen Versicherungsrechnung (s. dies. *Zbl.* **10**, 367; dort auch Erklärung der Bezeichnungen) und bilden den Ausgangspunkt für ganz besonders kurze Herleitungen verschiedener Sätze über Reserven, durchschnittliches Risiko u. a.

*Birnbaum* (Lwów).

## Geometrie.

**Arwin †, A.:** Punkt und Zahl. (*Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.*) 8. Skand. Mat.-Kongr., 237—242 (1935).

Die These, daß als Koordinaten der Punkte der anschaulichen Ebene nicht alle reellen Zahlen Verwendung finden, wird illustriert; anschließend wird die Einseitigkeit einer nur mittelbaren Anschauung hervorgehoben. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Väisälä, K.:** Über die Kongruenzaxiome der Geometrie. *Ann. Acad. Sci. Fennicae A* **44**, Nr 4, 1—12 (1935).

Im Rahmen der Hilbertschen Axiomgruppen I—III für die Geometrie läßt sich die Additivität der Streckenkongruenz — Axiom III 3 — durch das Axiom: „Ein Winkel, dem ein rechter kongruent ist, ist ein rechter“, ersetzen oder auch auf ein engeres Additivitätsaxiom zurückführen. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Musselman, J. R.:** On certain types of hexagons. *Amer. J. Math.* **57**, 503—508 (1935).

Mit den komplexen Zahlen  $p_k$  ( $k = 0, \dots, 5$ ), durch die in der Gaußschen Ebene die Ecken eines Sechsecks bestimmt sind, bilde man die Lagrangeschen Resolventen

$\sum_{k=0}^5 \varepsilon^k p_k$ , wo  $\varepsilon$  eine primitive 6. Einheitswurzel ist. Es wird der Zusammenhang zwischen einigen elementargeometrischen Eigenschaften von Sechsecken und dem Verschwinden einiger dieser Resolventen untersucht.

*R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Carafa, Mario:** Sulla polisezione di un angolo. *Period. Mat.*, IV. s. **15**, 230—237 (1935).

Es handelt sich in erster Linie um die Winkel-Fünftteilung. Es wird ein Apparat angegeben, der eine Pascalsche Schnecke zu zeichnen gestattet. Der Teilungspunkt liegt dann außerdem noch auf einer gleichseitigen Hyperbel. *O. Neugebauer*.

**Bilo, J.:** Sur les triangles orthologiques. *Mathésis* **49**, 189—192 (1935).

Si les droites  $b$  et  $c$ ,  $b'$  et  $c'$  sont des tangentes fixes de deux paraboles,  $a$  et  $a'$  des tangentes variables, de sorte que les triangles  $abc$  et  $a'b'c'$  sont orthologiques, les lieux des deux centres d'orthologie sont des droites, respectivement parallèles aux tangentes principales des paraboles. On peut, d'une infinité de manières, établir entre deux systèmes plans superposés, une affinité telle que deux paraboles données s'y correspondent et que tout triangle circonscrit à la première soit orthologique au triangle homologue. — Etant donnés deux quadrilatères coplanaires  $abcd$  et  $a'b'c'd'$ , si les



triangles  $abc$ ,  $bcd$  sont orthologiques aux triangles  $a'b'c'$ ,  $b'c'd'$ , les triangles  $cda$ ,  $dab$  sont orthologiques aux triangles  $c'd'a'$ ,  $d'a'b'$ . *O. Bottema* (Deventer, Nederl.).

**Deweck, M.:** Sur les projections axonométriques. *Mathesis* **49**, 14—19 (1935).

Nach dem Lehrsatz von Pohlke können drei Strecken  $OA'_1$ ,  $OA'_2$ ,  $OA'_3$  einer Ebene  $\Pi$ , die nicht derselben Geraden angehören, als Schrägriß eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks  $O(A_1A_2A_3)$  angesehen werden. Wird  $\Pi$  als Ebene der gewöhnlichen komplexen Zahlen aufgefaßt und entsprechen den Punkten  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$  die Zahlen  $\zeta_i$ , so ist nach Gauß  $\sum \zeta_i^2 = 0$  die notwendige und hinreichende Bedingung, daß  $OA'_1A'_2A'_3$  der Normalriß von  $OA_1A_2A_3$  auf  $\Pi$  ist. — Der Verf. zeigt nun, freilich ohne die demselben Gegenstand gewidmeten und weiter reichenden Untersuchungen von E. Waelsch, Zur Axonometrie; Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **19** (1910), und Parallelperspektive, komplexe Zahlen und Trägheit ebener Massen; ebenda **21** (1912), zu erwähnen, daß für  $\sum \zeta_i^2 \neq 0$  die beiden Zahlen  $\pm \sqrt{\sum \zeta_i^2}$  in  $\Pi$  Bildpunkte haben, deren Verbindungsgerade die Richtung der Normalrisse der Sehstrahlen besitzt. Diese Gerade trägt die große Achse der Trägheitsellipse mit der Mitte  $O$  für die mit gleichen Massen belegten Punkte  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $A'_3$ . Auch eine Konstruktion von  $OA_1A_2A_3$  aus der vorgegebenen Bildfigur  $OA'_1A'_2A'_3$  wird angegeben. *E. Kruppa* (Wien).

**Baggio, Francesco:** Su un metodo per costruire la prospettiva di una figura data. *Atti Accad. Sci. Torino* **70**, 581—587 (1935).

Wählt man den Hauptpunkt der Perspektive als Ursprung, den Horizont als  $y$ -Achse, die Hauptvertikale als  $z$ -Achse und den Hauptsehstrahl als  $x$ -Achse, so bestehen zwischen den Koordinaten  $x, y, z$  eines Raumpunktes und den Koordinaten  $\xi, \eta$  eines Zentralbildes die Gleichungen

$$\xi = \frac{dx}{d+z}, \quad \eta = \frac{dy}{d+z},$$

worin  $d$  die Bilddistanz des Auges ist. — Der Verf. zeigt ein Verfahren der graphischen Ermittlung von  $\xi$  und  $\eta$  auf Grund dieser Formeln, wobei er eine für alle Raumpunkte bloß einmal zu zeichnende Parabel verwendet. Durch dieses Verfahren kann der Zentralriß eines Objektes aus gegebenem Grund- und Aufriß leicht ermittelt werden.

*E. Kruppa* (Wien).

**Lebesgue, Henri:** Démonstration du théorème fondamental de la théorie projective des coniques faite à l'aide des droites focales de M. P. Robert. *Bull. Soc. Math. France* **63**, 21—154 (1935).

Verf. knüpft an eine elementargeometrische Arbeit von P. Robert (*L'Enseignement scientifique* **1928**, Nr 4, 108) über die Fokalgeraden und ihre Eigenschaften an und nimmt den neuen Beweis des Chaslesschen Satzes, demzufolge die Summe der durch die Erzeugenden eines Kegels 2. Grades mit zwei gewissen festen Geraden gebildeten Winkel konstant ist, zum Ausgangspunkt seiner Untersuchungen über Kegelschnitte. — 1. Nach den Definitionen der Fokalgeraden eines Kreises und ihrer Haupttypen werden ihre wichtigsten Eigenschaften neu bewiesen, insbesondere gezeigt, daß durch jeden Punkt  $N$  des Raumes zwei verschiedene Fokalgeraden in bezug auf einen Kreis  $\Gamma$  gibt, sofern  $N$  weder auf  $\Gamma$  noch auf seiner Achse gelegen ist. — 2. Aus der metrischen Fassung dieser abgeleiteten Existenzeigenschaft ergeben sich dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß irgend zwei Geraden Fokalgeraden eines Kreises sind. — 3. Es folgt die eingehende Untersuchung der Kegelschnitte. Dabei ergibt sich eine metrische Kennzeichnung der Kegelschnitte durch die Relation der Fokalgeraden und der Beweis des sog. Fundamentalsatzes, wonach jede Perspektive (oder Projektion) eines Kegelschnittes wieder ein Kegelschnitt ist. — 4. Die Tragweite der neuen Charakterisierungsmethode wird dann analytisch aufgezeigt. — 5. Schließlich geht der Verf. noch auf die Grundlagen der geometrisch-konstruktiven Theorie der Kegelschnitte bei ihrer Kennzeichnung durch Fokalgeraden ein und zeigt Wege zu Verallgemeinerungen bekannter Sätze der Kegelschnittlehre

und Methoden zur Auffindung neuer geometrischer Tatsachen, von denen er eine ganze Reihe angibt und elementar beweist. *Steck* (München).

**Robinson, Robin:** Note on the geometry interpretation of the vanishing of a certain projective invariant of two conics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 399—406 (1935).

Alle Geraden, deren Schnittpunktepaare mit zwei gegebenen Kegelschnitten  $a^2, b^2$  je einen harmonischen Wurf bilden, umhüllen einen dritten Kegelschnitt  $c^2$ . Die vier Tangenten an  $a^2$  und die vier Tangenten an  $b^2$  in den vier Schnittpunkten von  $a^2$  und  $b^2$  berühren auch  $c^2$ . Die Diskriminante von  $c^2$  ist projektive Invariante der Aufgabe und Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Da ihr Verschwinden den Zerfall von  $c^2$  kennzeichnet, müssen in solchem Falle die erwähnten acht Tangenten je zu vieren je durch einen Punkt gehen. — Der Verf. gibt notwendige und hinreichende geometrische Bedingungen für den Zerfall des umhüllten Kegelschnittes  $c^2$ ; er untersucht die Zahl der Kegelschnitte  $b^2$  eines Kegelschnittbüschels (mit vier Grundpunkten), deren jeder mit einem festen Kegelschnitt  $a^2$  eine solche Konfiguration bildet, daß die zugehörige Invariante verschwindet. Auch betrachtet er die duale Konfiguration und führt entsprechende Untersuchungen an ihr durch. Spezialfälle der behandelten Theoreme beziehen sich auf die Konfiguration zweier orthogonalen Kreise.

*Haenzel* (Karlsruhe).

**Gambier, Bertrand:** Quadriques coupant deux autres chacune suivant 4 droites trois couples remarquables de deux quadriques. (58. sess., Rabat, 28.—30. III. 1934.) *Assoc. Franç. Avancement Sci.*, 43—45 (1934).

**Rangaswami, K.:** The theory of normals to a quadric in hyperspace. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **1**, 931—951 (1935).

Ausdehnung auf den Raum  $S_n$  einiger Sätze über konfokale Kegelschnitt- oder Quadrikscharen. Eine Quadrikschar  $\sum (a_i + \varrho) u_i^2 = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) ist im Raume  $S_n$  gegeben. Jede Hyperebene  $\alpha$  bestimmt eindeutig eine Achse  $a$ , Ort der Pole von  $\alpha$  in bezug auf alle Quadriken der Schar; es gibt  $\infty^n$  Achsen, die einen  $\infty^n$ -Strahlenkomplex bilden. Zwei Hyperebenen heißen konjugiert, wenn die Achse der einen in der anderen liegt. Allgemeiner wird ein  $S_r$  axial genannt, wenn seine Polar- $S_{n-r-1}$  in bezug auf alle Quadriken der Schar paarweise einen  $S_{n-r-2}$  gemein haben; die  $n - r$  Quadriken der Schar, die jenen  $S_r$  berühren, fallen alle zusammen und umgekehrt. Wenn in der Schar eine Quadrik  $Q$  gewählt wird, so gehören ihre Normalen gleichzeitig dem Achsenkomplex und dem Fokalkomplex von  $Q$  (d. h. dem Komplex aller Geraden, die die Berührungspunkte eines Axial- $S_r$  und eines Axial- $S_{n-r-1}$  verbinden, die in bezug auf  $Q$  polar sind). Die Einführung eines linearen Strahlenkomplexes  $C$  führt zu weiteren Eigenschaften, die die Apollonischen und die Steinerschen Quadriken betreffen: die erste ist Ort aller Punkte, deren Polarehyperebenen in bezug auf  $Q$  und  $C$  konjugiert sind; die zweite wird von allen Hyperebenen eingehüllt, deren Achsen dem Komplex  $C$  angehören. Anwendungen auf den Fall  $n = 3$ ; wenn  $C$  singulär ist, gibt es zwei verschiedene Arten von Netzen von Apollonischen Quadriken. Analytische Erläuterungen. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Ephrämowitsch, V., et M. Kreines:** Sur la topologie des quadriques. *C. R. Acad. Sci. URSS* **2**, 365—366 u. franz. Text 366—367 (1935) [Russisch].

Im  $(n + 1)$ -dimensionalen projektiven Raum  $P^{n+1}$  wird die quadratische Mannigfaltigkeit  $F^n$  betrachtet:  $x_0^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{n+1}^2 = 0$ . Geht man zum zweifach überlagernden sphärischen Raum  $S^{n+1}$  über, indem man  $x_0, \dots, x_{n+1}$  als Koordinaten des euklidischen  $R^{n+2}$  auffaßt und die Gleichung  $x_0^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 2$  hinzufügt, so erhält man aus  $F^n$  die zweifache Überlagerung  $x_0^2 + \dots + x_r^2 = 1$ ,  $x_{r+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ , d. h. das topologische Produkt der beiden Sphären  $S^r$  und  $S^{n-r}$ . Für  $2 \leq r \leq n - r$  ist das zugleich die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit von  $F^n$ . Aus der Verschiedenheit dieser Überlagerungsmannigfaltigkeiten folgt, daß eine quadratische Mannigfaltigkeit nicht nur projektiv, sondern auch topologisch durch das Zahlenpaar  $(r, n - r)$  charakterisiert ist. *H. Seifert* (Dresden).



**Falch, Olaf: Kreissysteme.** Norsk mat. Tidsskr. 17, 39—52 (1935) [Norwegisch].

Die Kreise der Ebene werden durch stereographische Projektion auf die Kreise einer Kugel übergeführt, und diese werden durch die Pole ihrer Ebenen in bezug auf die Kugel ersetzt. Mittels dieser bekannten Transformation werden einige Sätze, hauptsächlich über ein- und zweidimensionale lineare und quadratische Kreissysteme der Ebene, abgeleitet.

David Fog (Kopenhagen).

**Wiman, A.: Über die  $W$ -Kurven im dreidimensionalen Raume.** Acta math. 64, 243 bis 352 (1935).

Der Verf. untersucht einige liniengeometrische Gebilde, die mit einer  $W$ -Kurve projektiv-invariant verbunden sind. Die Gleichung einer algebraischen  $W$ -Kurve kann geschrieben werden

$$x : y : z : w = t^n : t^{n_1} : t^{n_2} : 1,$$

dabei sind  $n, n_1, n_2$  teilerfremde ganze Zahlen. Indem der Verf. für  $n, n_1, n_2$  oft auch beliebige reelle Zahlen zuläßt, erstrecken sich die Untersuchungen auf verallgemeinerte  $W$ -Kurven, die je als Grenzkurven einer Folge von algebraischen  $W$ -Kurven aufgefaßt werden können. Die Gesamtheit dieser  $W$ -Kurven wird in 5 Hauptklassen gegliedert. In einigen dieser Klassen werden die besonders ausgezeichneten algebraischen  $W$ -Kurven, die der Bedingung  $n = n_1 + n_2$  genügen, hervorgehoben; sie gehören einem linearen Komplex an und liegen stets auf einer  $F_2$ . — Die Substitution  $t' = kt$  bestimmt ein Element der eingliedrigen projektiven Gruppe, welche die  $W$ -Kurve zuläßt. Verbindet man die durch diese Transformation zugeordneten Punkte der  $W$ -Kurve durch Geraden, so erhält man eine der  $W$ -Kurve „assozierte Regelfläche“ ( $AR$ ). Der Hauptteil der Arbeit dient der Untersuchung der  $AR$ . Ihr Grad ist im allgemeinen gleich  $n + n_1 - n_2$ , jedoch kann er sich für bestimmte  $k$ -Werte reduzieren. Eine  $AR$  läßt sich aus Bahnkurven der eingliedrigen Gruppe erzeugen. Insbesondere zerfällt die Doppelkurve einer  $AR$  in lauter Bahnkurven. Die  $AR$  ist gleichzeitig  $AR$  für jeden solchen Zweig der Doppelkurve. Ein Zweig der Doppelkurve, längs dessen sich zwei Schalen der  $AR$  berühren, heißt Berührungsdoppelkurve. Erwähnt sei, daß unter den  $AR$  auch abwickelbare Flächen auftreten. — Es wird nun gezeigt, daß für jede Hauptklasse von  $W$ -Kurven die  $AR$  sich durch übereinstimmende Eigenschaften der Doppelkurve charakterisieren lassen. In derselben Weise werden die  $AR$  der besonders ausgezeichneten  $W$ -Kurven untersucht, nachdem für sie eine reelle Darstellung gefunden wurde. — Im folgenden werden quadratische  $W$ -Kongruenzen betrachtet, die sich durch eine Schar von  $AR$  erzeugen lassen: Die gemeinsamen Tangenten zweier  $F_2$ , die einander in einem windschiefen Vierseit schneiden, bilden eine Hirstsche Kongruenz. Das Büschel der  $F_2$  mit gemeinsamem Vierseit wird dargestellt durch die Gleichung  $xw - \lambda yz = 0$ . Nimmt man eine Schar von Bahnkurven einer eingliedrigen Gruppe, die auf irgendeiner solchen  $F_2$  liegen, so erzeugen für einen beliebigen gegebenen Parameter  $k$  die  $AR$  dieser Bahnkurven eine Hirstsche Kongruenz. Die Brennflächen sind 2 Flächen des Büschels. Nach der Untersuchung von Realitätsfragen und der Bestimmung von geschlossenen  $r$ -Seiten der Hirstschen Kongruenzen wird der Fall quadratischer  $W$ -Kongruenzen behandelt, deren Brennflächen aus einem quadratischen Kegel und einem diesen Kegel doppelt berührenden Kegelschnitt bestehen. — Die letzten Abschnitte der Arbeit sind höheren  $W$ -Kongruenzen gewidmet, die zwei Flächen des  $W$ -Flächenbüschels  $x^p w^q - \lambda y^r z^s = 0$  oder  $x^p - \lambda y^r z^s w^q = 0$  als Brennflächen haben. Zu einem solchen Flächenpaar gibt es  $2p$   $W$ -Kongruenzen. Der Verf. beweist eine Reihe interessanter Sätze über die Zerlegung von tetradalen Komplexen, die das gemeinsame Koordinatentetraeder des Flächenbüschels als Grundtetraeder besitzen, in  $W$ -Kongruenzen und beschließt die Arbeit mit einer Untersuchung über Realitätsfragen.

W. Haack (Danzig).

**Hjelslev, J.: Die graphische Geometrie.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 3—12 (1935).

Unter graphischer Geometrie sei im folgenden die Gesamtheit derjenigen Fragen verstanden, bei welchen es sich um die Untersuchung geometrischer (reeller) Gebilde

handelt, und zwar um die Untersuchung mit Hilfe eines zugrunde gelegten Ordnungsbegriffes; die „Ordnung“ des betrachteten Gebildes  $G$  ist dabei definiert als die maximale Mächtigkeit des Durchschnittes von  $G$  mit vorgegebenen „Grundgebilden“, den sog. „Ordnungscharakteristiken“. Wir stehen hier also in demjenigen Problemkreis, welcher auf C. Juel zurückgeht, dessen Arbeiten übrigens, wie Verf. bemerkt, „zugleich den Beginn einer systematischen Neuorientierung in der allgemeinen Theorie der Kurven und Flächen“ bilden. Die vorliegende Arbeit bringt (unter anderem) gewisse für die graphische Geometrie wichtige und fruchtbare Gedanken, von denen einige im folgenden aufgeführt seien. Es handelt sich dabei einmal um die Betonung des „finiten“ Charakters graphisch-geometrischer Untersuchungen. So wird am Falle der Lehre von den Kurven endlicher Ordnung angedeutet, daß „der prinzipielle Inhalt“ dieser Lehre „keine besonderen mengentheoretischen oder infinitesimalen Voraussetzungen erfordert“, und es wird hervorgehoben: „Der ganze Bereich läßt sich in eine elementare Lehre einordnen, deren wahre Grundlage die Axiome der Anordnung bilden.“ Beispielsweise ist die Klassifikation der ebenen Kurven dritter Ordnung im wesentlichen gleichbedeutend mit der Klassifikation der Polygone dritter Ordnung (wobei als Ordnungscharakteristiken die Geraden zugrunde gelegt sind). Ein zweiter Gesichtspunkt betrifft — in gewissem Sinne — die Umkehrung eines der eben erwähnten Gedanken: Nicht nur ist es, wie oben betont, überflüssig, bei gegebener Ordnung über die betrachteten Gebilde weitere, einschränkende Voraussetzungen, z. B. lokaler Natur, zu machen; vielmehr kann umgekehrt aus Annahmen über die Ordnung z. B. auf solche Eigenschaften der betrachteten Gebilde geschlossen werden. Auf Differenzierbarkeit im üblichen Sinne kann man z. B. schließen, wenn eine ebene Kurve  $y = f(x)$  bezüglich der Parabeln  $n$ -ten Grades  $y = P_n(x)$  als Ordnungscharakteristiken die (kleinstmögliche) Ordnung  $(n+1)$  besitzt; dann ist nämlich  $f(x)$  mindestens  $(n-1)$ -mal differenzierbar nach  $x$ . (Dieser Satz ist Spezialfall viel allgemeinerer Sätze, welche vom Verf. früher [1914] veröffentlicht wurden.) Nun macht aber die Differentialgeometrie üblicherweise bei der Untersuchung z. B. von ebenen Kurven derartige Differenzierbarkeitsannahmen. Der Hjelmsslevsche Satz gestattet also, wie angedeutet wird, z. B. den Schluß, „daß der Gegenstand der gewöhnlichen Differentialgeometrie der Kurven sich in natürlicher Weise“ in die graphische Geometrie „einordnen läßt“. — Entsprechendes gilt auch für Flächen. *Haupt.*

**Franklin, Philip:** On Minkowski's definition of length and area. *J. Math. Physics*, Massachusetts Inst. Technol. 14, 179—185 (1935).

Verf. verifiziert, daß die Minkowskische Längen- und Oberflächendefinition für (nicht notwendig konvexe) stetig gekrümmte Kurven bzw. Flächen auf die gewöhnlichen Integraldarstellungen für Länge bzw. Oberfläche führt. Die neuere, sehr viel weitergehende Literatur über diese Frage (vgl. z. B. Bonnesen-Fenchel, *Erg. Math.* 3, H. 1, 47—48) ist dem Verf. entgangen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

● **Blaschke, Wilhelm:** Integralgeometrie. (*Actualités scient. et industr.* Nr. 252. *Exposés de géométrie. Publiés par Wilhelm Blaschke. I.*) Paris: Hermann & Cie. 1935. 24 S. Frcs. 7.—.

Les problèmes relatifs aux probabilités géométriques amènent à considérer des ensembles d'éléments géométriques (ens. de points, de droites, de plans...); il faut définir la mesure dans ces ensembles pour avoir la probabilité pour qu'un élément qui appartient à un tel ensemble  $E$  appartienne en même temps à une partie donnée de  $E$ . Les probabilités cherchées sont exprimées par des intégrales  $m$ -uples de la forme  $\iint \dots f(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 \dots du_m$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_m$  étant  $m$  paramètres indépendants propres pour déterminer un élément de  $E$ . En général  $f$  sera une fonction quelconque de sorte qu'à tout élément de  $E$  correspond une densité  $f(u_1, \dots, u_m)$  déterminée. Mais les problèmes les plus simples et intéressants au point de vue purement géométrique se rattachent aux cas où la fonction  $f$  est telle que l'intégrale  $m$ -uple en question soit invariable pour un changement quelconque du système de coordonnées. Par exemple  $x \cos u_1 + y \sin u_1 - u_2 = 0$  étant l'équation de la droite dans les coordonnées cartésiennes  $x, y$ , et  $c$  une constante, parmi les intégrales  $\iint f(u_1, u_2) du_1 du_2$  l'intégrale  $c \iint f du_1 du_2$  est la seule qui ne change pas pour un changement arbitraire des axes  $Ox, Oy$ . L'auteur fait une étude de ces problèmes dans l'espace à  $m$  dimensions (par exemple à densité dans un ensemble



de plans à  $r$  dimensions qui passent par un point de l'espace à  $n$  dimensions,  $r < n$ ); pour obtenir les expressions des densités  $f(u_1, \dots, u_m)$  il emploie le calcul avec les formes différentielles de Pfaff; il n'explique pas les notions fondamentales (produit extérieur de deux formes, différentielle d'une forme de Pfaff), il renvoie, pour ces explications à l'ouvrage de E. Kähler intitulé *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (Leipzig-Berlin 1934; ce Zbl. 11, 161). — Le dernier paragraphe contient des indications sur les problèmes voisins: invariants intégraux de la géométrie projective, applications aux problèmes sur les courbes convexes et fermées dans le plan.

B. Hostinský (Brno/C. S. R.).

## Topologie:

Kittell, Irving: A group of operations on a partially colored map. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 407—413 (1935).

Für die Lösung des Vierfarbenproblems sind Gebietseinteilungen der Kugel von Wichtigkeit, in welchen die Färbung der Gebiete in 4 Farben  $A, B, C, D$  durchgeführt ist bis auf ein einziges Fünfeck, das von einem Gebietsring der Farben  $C D B A B$  umgeben ist. Falls die Kempeketten der Färbung noch eine gewisse Bedingung erfüllen, lassen sich 8 Operationen von Umfärbungen angeben, deren Verhalten an einzelnen Beispielen untersucht wird.

R. Reidemeister (Marburg, Lahn).

Ephrämowitsch, W.: Topologische Klassifikation affiner Abbildungen der Ebene. Rec. math. Moscou 42, Nr 1, 23—29 u. dtsh. Text 30—36 (1935) [Russisch].

An die affine Klassifikation der affinen Transformationen anknüpfend gibt der Verf. topologisch invariante Eigenschaften wie Fixpunktfreiheit, Auftreten eines isolierten Fixpunktes oder einer Fixpunktcurve oder Verhalten der Bahnkurven an und stellt so eine Reihe von topologischen Äquivalenztypen der Affinitäten auf.

K. Reidemeister (Marburg, Lahn).

Ostrowski, Alexander: Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente. II. Ein Zusammenhang zwischen der Tangentendrehung längs eines Bogens und seinen Ordnungen in bezug auf die beiden Endpunkte. Compositio Math. 2, 177—193 (1935).

Es sei  $W$  ein offener Jordanbogen, längs dessen sich eine Tangentenrichtungsfunktion  $\theta(P)$  definieren läßt (vgl. I. Compositio Math. 2, 26—49 (1935); dies. Zbl. 11, 177). Unter der Tangentendrehung längs  $W$  wird der Zuwachs von  $\theta(P)$  verstanden, wenn man  $W$  vom Anfangspunkte  $A$  nach dem Endpunkte  $B$  durchläuft. Die Ordnung des Anfangspunktes  $A$  in bezug auf einen Teilbogen  $A'B$  von  $W$  strebt dann für  $A' \rightarrow A$  nach einem bestimmten Grenzwert, der als Ordnung von  $W$  in bezug auf  $A$  bezeichnet wird. Analog läßt sich die Ordnung von  $W$  in bezug auf den Endpunkt  $B$  definieren. Es wird nun der Satz bewiesen, daß die Tangentendrehung längs  $W$  gleich der Summe der Ordnungen von  $W$  in bezug auf  $A$  und  $B$  ist. H. Seifert (Dresden).

Ostrowski, Alexander: Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente. III. Eine Formel für die Differenz der Richtungszuwächse zwischen zwei Linienelementen längs verschiedener Verbindungswege. Compositio Math. 2, 194—200 (1935).

Zwei orientierte Linienelemente  $q_A$  und  $q_B$  seien durch zwei Wege  $W_1$  und  $W_2$  verbunden, längs denen sich Tangentenrichtungsfunktionen definieren lassen. Es wird eine Beziehung zwischen dem Tangentenrichtungszuwachs längs des geschlossenen Weges  $W_1 W_2^{-1}$  und den Richtungszuwächsen zwischen  $q_A$  und  $q_B$  längs  $W_1$  bzw.  $W_2$  abgeleitet.

H. Seifert (Dresden).

Wolff, Julius: Sur le lieu des points équidistants de deux continus et la division du plan par une courbe de Jordan. Bull. Soc. Math. France 63, 36—55 (1935).

Die Punkte, die von zwei beschränkten, punktfremden Kontinuen der Euklidischen Ebene gleichen Abstand haben, bilden eine Kurve  $C$ , die entweder selbst eine geschlossene Jordankurve ist oder durch reziproke Radien in eine solche transformiert werden kann.  $C$  besitzt in jedem Punkt eine „rechte“ und „linke“ Tangente, und die rechte (linke) Tangente ist stetig. Wenn die Menge der Punkte, die von zwei abgeschlossenen Mengen  $\sigma_1, \sigma_2$  mit genau einem gemeinsamen Punkt  $S$  gleichen Abstand haben, innere Punkte enthält, so bilden letztere einen konvexen Bereich  $D$ . Sind  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  speziell Jordanbögen, so besteht der Rand des Gebietes der Punkte,

die von  $\sigma_1$  weiter entfernt sind als von  $\sigma_2$ , aus einer Kurve  $C_1$  mit denselben Eigenschaften wie oben und einem Teil des Randes von  $D$ . Mit Hilfe dieser Sätze wird auf einem neuen Weg der Jordansche Kurvensatz sowie die Erreichbarkeit der Punkte einer Jordankurve bewiesen.

H. Busemann (Kopenhagen).

**Pospíšil, Bedřich: Un théorème sur  $n$  courbes simples dans le plan.** Čas. mat. fys. 64, 293—296 (1935).

Verf. beweist folgenden von Čech vermuteten, von Cleveland für  $n = 1$  bewiesenen Satz: Es sei  $K$  ein lokal zusammenhängendes Kontinuum der Ebene  $R$ ; es seien weiter  $a$  und  $b$  zwei Punkte von  $R$  mit der Eigenschaft, daß für jeden  $a$  und  $b$  verbindenden Bogen  $B$  die Menge  $BK - (a) - (b)$  mindestens  $n$  Punkte enthält; dann enthält  $K$  mindestens  $n$  paarweise fremde, einfache, geschlossene Kurven  $c_1, \dots, c_n$ , von denen jede den einen der beiden Punkte, etwa  $a$ , umschließt, jedoch den Punkt  $b$  nicht umschließt.

Nöbeling (Erlangen).

**Johansson, Ingebrigt: Zur Topologie der einseitigen Flächen.** (Stockholm, Sitzg. v. 14.—18. VIII. 1934.) 8. Skand. Mat.-Kongr., 349—353 (1935).

Es wird bewiesen, daß es auf der nichtorientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht  $k = 3$  nur einen Typus von orientierbarmachenden Rückkehrschnitten gibt. Daraus werden die Automorphismen der Fundamentalgruppe der Fläche abgeleitet.

H. Seifert (Dresden).

**Kérékjártó, Béla: Théorie des transformations régulières de surfaces.** Mat. természett. Értes. 53, 371—404 u. franz. Zusammenfassung 405—406 (1935) [Ungarisch].

**Whitehead, J. H. C.: A certain region in Euclidean 3-space.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 364—366 (1935).

Es wird ein Gebiet  $M$  im euklidischen  $R^3$  konstruiert, dessen Homologiegruppe der Dimension 2 und dessen Fundamentalgruppe aus dem Einselement allein bestehen. Trotzdem ist, wie Verf. an anderer Stelle beweisen will, keine geradlinige Triangulierung von  $M$  eine „formale 3-Zelle“. Unter einer formalen 3-Zelle wird ein unendlicher Komplex verstanden, der nach geeigneter Unterteilung von einer unendlichen Folge von dreidimensionalen Elementen  $E_1, E_2, \dots$  überdeckt wird, wobei  $E^{n+1}$  sämtliche Simplexe der Triangulation enthält, welche  $E^n$  treffen. H. Seifert.

**Cairns, Stewart S.: On the triangulation of regular loci.** Ann. of Math., II. s. 35, 579—587 (1934).

Von mehreren Autoren (v. d. Waerden, Lefschetz, Koopman und Brown) sind Triangulierungssätze über analytische Gebilde aufgestellt worden. Verf. verallgemeinert diese Resultate, indem er statt der Analytizität nur die einmalige stetige Differenzierbarkeit verlangt. — Es sei  $s_r$  eine (offene oder abgeschlossene) konvexe, polyedrale  $r$ -Zelle im Raum der Parameter  $u_1, \dots, u_r$ . Eine auf  $s_r$  definierte Funktion  $f = f(u_1, \dots, u_r)$  heißt von der Klasse  $C'$ , wenn  $f$  stetige erste partielle Ableitungen im Inneren von  $s_r$  hat und dieselben auf der Begrenzung von  $s_r$  stetige Grenzwerte haben. Vermitteln  $n$  Funktionen  $y_1 = f_1, \dots, y_n = f_n$  eine topologische Abbildung von  $s_r$  in den  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum mit den Koordinaten  $y_1, \dots, y_n$ , so heißt das Bild  $S_r$  eine (offene bzw. abgeschlossene) reguläre  $r$ -Zelle, wenn die  $f_i$  von der Klasse  $C'$  sind und ihre Funktionalmatrix in  $s_r$  den Rang  $r$  hat. Eine reguläre oder vollständig reguläre 0-Mannigfaltigkeit ist ein Punkt. Ein reguläres 0-Gebilde (0-locus) ist eine Menge endlich vieler Punkte. Es seien die vollständig regulären  $i$ -Mannigfaltigkeiten und die regulären  $i$ -Gebilde für  $i = 0, \dots, r - 1$  definiert. Eine  $i$ -Mannigfaltigkeit (jeder Punkt in Umgebung homöomorph zur  $i$ -dimensionalen Vollkugel) heißt regulär, wenn sie ein reguläres  $i$ -Gebilde ist. Eine  $r$ -Mannigfaltigkeit heißt vollständig regulär, wenn jeder Punkt eine reguläre  $r$ -Zelle zur Umgebung hat (jeder Randpunkt eine abgeschlossene reguläre  $r$ -Zelle als abgeschlossene Umgebung) und ihr Rand, falls vorhanden, aus endlich vielen geschlossenen regulären  $(r - 1)$ -Mannigfaltigkeiten besteht. Ein reguläres  $r$ -Gebilde ist Summe endlich vieler vollständig regulärer  $i$ -Mannigfaltigkeiten  $M_j$  ( $j = 0, \dots, r$ ), so daß, wenn  $M_j$  innere



Punkte von  $M_k$  enthält,  $M_k$  im Rand von  $M_j$  liegt. — Diese regulären Gebilde werden vom Verf. trianguliert, indem er sie durch endlich viele reguläre  $r$ -Zellen überdeckt und dieselben nacheinander trianguliert. Die Regularität gestattet es, jeden dieser Schritte so an die vorhergehenden anzuschließen, daß insgesamt eine Triangulierung des Gebildes entsteht.

*Nöbeling* (Erlangen).

**Jones, F. B.:** A theorem concerning locally peripherally separable spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 437—439 (1935).

Ein zusammenhängender, im kleinen zusammenhängender metrischer Raum  $R$  ist vollständig separabel, falls für jede Umgebung  $U \ni x$ ,  $x \in R$ , eine andere Umgebung  $V \subset U$  existiert, deren Grenze separabel ist. — Verschärfung für den Fall der im kleinen zusammenhängenden Räume eines Satzes von Alexandroff [Über die Metrisation der im kleinen kompakten topologischen Räume. *Math. Ann.* **92**, 294—301 (1924)].

*Julia Rózańska* (Moskau).

## Mechanik.

**Kerékjártó, B. de:** Stabilité permanente et Hypothèse ergodique. *C. R. Acad. Sci., Paris* **201**, 123—124 (1935).

The dynamical systems under consideration are conservative, of two degrees of freedom and have closed manifolds of states of motion. The motions with specified energy constant define a closed three-dimensional submanifold  $M$ . A motion in  $M$  is said to be permanently stable (Birkhoff, *Dynamical Systems*, p. 121) if any motion which is near the motion for  $t = 0$  is near the motion for all  $t$ . If a surface of section exists in  $M$  it is two-dimensional. The author announces the following theorem: If the dynamical system considered admits a (closed orientable) surface of section of genus  $p > 1$ , the existence of a single solution which is permanently stable implies that the system cannot be ergodic (metrically transitive). There is added the interesting conjecture that the existence of an integral invariant of the transformation of the surface of section into itself (for the existence of such an invariant integral see Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.* **18**, 285) implies the existence of a permanently stable solution, hence non-metric-transitivity.

*G. A. Hedlund.*

**Cernuschi, Félix:** Bemerkung zur statistischen Mechanik. *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. **10**, 116—118 (1935) [Spanisch].

**Giorgi, G.:** Sulle grandezze meccaniche fondamentali. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **21**, 611—614 (1935).

**Denizot, Alfred:** On relative motion. *Wiadom. mat.* **39**, 173—178 (1935).

**Sestini, G.:** Sul piano centrale di alcuni sistemi di vettori. *Boll. Un. Mat. Ital.* **14**, 168—172 (1935).

Die Möbiussche Zentralebene eines Systems gebundener Vektoren und ihre Ausartungen werden bestimmt 1. für das System der Bewegungsmengen eines starren Körpers, 2. für das System der hydrostatischen Druckkräfte, mit denen eine schwere Flüssigkeit auf einen eingetauchten Körper wirkt.

*W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Levi-Civita, T.:** Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro. *Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncei* **88**, 102—106 (1935).

Es wird, im Ausblick auf eine analoge Frage der Relativitätstheorie, die Bedingung dafür aufgestellt, daß in einem strömenden Kontinuum der Schwerpunkt dauernd mit demselben Materieteilchen zusammenfällt, in der Form: Schwerpunkts-geschwindigkeit = Geschwindigkeit des momentanen materiellen Schwerpunkts. Ferner wird darauf hingewiesen, daß diese Bedingung für „homographische“ Bewegungen erfüllt ist, d. h. solche, bei denen die momentane Geschwindigkeitsverteilung eine lineare Vektorfunktion der Koordinaten ist.

*F. Noether* (Tomsk).

**Agostinelli, Cataldo:** Sopra alcuni integrali particolari delle equazioni del moto di un corpo rigido pesante, intorno a un punto fisso. *Acta Pontif. Acad. Sci. Novi Lyncei* 88, 64—84 (1935).

Die  $z$ -Achse sei eine Hauptträgheitsachse in bezug auf den festen Punkt und soll den letzteren und den Schwerpunkt enthalten. Gefragt wird nach allen denjenigen Fällen, in welchen zwischen  $p, q, r$  zwei Beziehungen von der Form  $p^2 = G(r)$ ,  $q^2 = H(r)$  bestehen, wobei  $G$  und  $H$  Polynome mit verfügbaren konstanten Koeffizienten bezeichnen. Die Grade dieser beiden Polynome seien  $g$  und  $h$  und man setze  $n = \text{Max}(g, h)$ . Der Verf. zeigt, daß die Behandlung des Problems nur elementare und durchsichtige Rechnungen erfordert. Sein Hauptergebnis ist, daß  $n$  kleiner als 5 sein muß. Sein Verfahren liefert systematisch auch die bekannten Fälle: Für  $n = 4$  und  $n = 3$  die Fälle von Goriatschoff (1899) und N. Kowalewski (1908) mit

$$C = \frac{16B(A-B)}{9A-8B} \quad \text{bzw.} \quad C = \frac{18B(A-B)}{10A-9B},$$

womit schon alle Fälle  $n > 2$  erschöpft sind. Für  $n = 2$  hebt der Verf. hervor, daß die von Stekloff (1899) und neulich von Fabbri [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.* 19 (1934); *Zbl. Mech.* 2, 98, 193] betrachteten Fälle nicht die volle Klasse  $n = 2$  erschöpfen, da ein zu  $n = 2$  führender Fall von S. Kowalewski ( $B = C = 2A$ ) nicht mit einbegriffen ist.

Wintner (Baltimore).

**Iglisch, Rudolf:** Zur Theorie der Schwingungen. III. *Mh. Math. Phys.* 42, 7—36 (1935).

Der Verf. illustriert die Lichtensteinsche Methode zur Gewinnung schwach gestörter periodischer Lösungen an Hand eines einfachen Beispiels, bestehend aus einem gewöhnlichen Pendel mit elastischem Faden. (II. vgl. dies. *Zbl.* 4, 153.) Wintner.

**Möller, Jens P.:** Zwei Bahnklassen im problème restreint. *Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels.* 13, Nr 5, 1—21 (1935).

Die Arbeit bringt das numerische Material zu den beiden Strömgrenschen Bahnklassen, deren natürlicher Abschluß in Nr. 60 der *Publ. Københavns Observ.* behandelt worden ist. — I. Die eine dieser Gruppen ist die Fortsetzung der kleinen kreisähnlichen retrograden Bahnen um eine der beiden Massen. Die Bahn verliert ihren kreisähnlichen Charakter nur langsam und entwickelt sich durch unendlich viele Stoßbahnen hindurch, die eine unbegrenzt wachsende Anzahl von immer größer werdenden Schleifen einführen. Das a. a. O. vom Verf. angegebene approximative Modell ergibt dabei eine gute Näherung. — II. Die andere Gruppe ist doppelsymmetrisch und stellt die Fortsetzung der Librationen um den die beiden gleichen Massen trennenden kollinearen Lagrangeschen Punkt dar. Diese Gruppe beginnt mit kleinen retrograden Bahnen, die ziemlich lange die Gestalt von recht flachen Ellipsen haben. Die Weiterentwicklung der Gruppe ist qualitativ im wesentlichen dieselbe wie in I. — Die Entwicklung im großen von I und von II wird durch je sechs Figuren von numerisch berechneten Bahnen illustriert.

Wintner (Baltimore).

**Sokoloff, Georges:** Sur la collision générale dans le cas symétrique du problème des trois corps. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 1, 27—33 (1934) [Ukrainisch].

L'auteur considère dans ce Mémoire la collision générale des trois corps dans le cas du mouvement plan avec axe de symétrie dans son plan. — Prenons pour pôle le sommet  $P_0$  du triangle isocèle formé par les trois corps, pour l'axe polaire l'axe de symétrie du triangle et désignons par  $m, r, \varphi$  la masse et les coordonnées polaires du point  $P_1$ . Le problème se réduit à la recherche des solutions du système:

$$r \frac{ds}{dr} = \frac{f_1 s^3 + f_2 s^2 + f_3 s + f_4}{f}; \quad r \frac{d\vartheta}{dr} = s \quad \left( \vartheta = \varphi - \frac{\pi}{6} \right)$$

qui tendent vers zéro lorsque  $r$  tend vers zéro,  $f, f_i$  désignant des fonctions holomorphes dans le voisinage des valeurs  $r = 0, \vartheta = 0$  ( $f_0 \neq 0$ ). — Si la constante des forces  $h = 0$ ,



le problème se ramène à la considération de l'équation bien connue de Briot et Bouquet.  
— Dans le cas général les solutions cherchées sont représentées par les développements en séries des puissances entières de  $hr, cr^4$ , où  $c$  est une constante arbitraire,

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+36\alpha}-1}{4}, \quad \alpha = \frac{m}{M},$$

$M$  étant la masse totale du système.

*Autoreferat.*

**Goffin, Elisabeth:** Note sur l'étude des potentiels quasi-newtoniens par la méthode des perturbations. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 523—534 (1935).

Die Verf. schlägt vor, das Newtonsche Potential  $k^2/r$  durch den Ausdruck

$$\frac{k^2}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ \alpha \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \beta r^2 \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] \right\}$$

zu ersetzen, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  zu bestimmende Konstanten,  $r$  und  $\vartheta$  Polarkoordinaten in der Bewegungsebene sind und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Durch Spezialisierung von  $\alpha$  und  $\beta$  erhält man genau oder näherungsweise verschiedene in der Literatur oft diskutierte Ansätze. Der Einfluß des Störungsfaktors  $\{ \}$  auf die elliptischen Elemente wird auf die übliche Weise aus den Lagrangeschen Störungsformeln berechnet.

*Wintner* (Baltimore).

**Glenn, Oliver E.:** Saturnian rings. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 4, 241 bis 249 (1935).

Diskussion der Bewegungsformen in einem System von Saturnsringen, wenn die Partikel der Ringe einer Zentralkraft unterworfen sind.

*Klose* (Berlin).

**Maruhn, Karl:** Ergänzung zu meiner Arbeit: Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Math. Z. 40, 312—314 (1935).

In der im Titel genannten Arbeit wurde die Frage offen gelassen, ob bei der  $n$ -ten Verzweigungsschar die Winkelgeschwindigkeit als Scharparameter verwendet werden kann, sobald  $n > 1$  ist (vgl. dies. Zbl. 11, 230). Durch eine einfache Rechnung wird jetzt bewiesen, daß die Antwort stets bejahend ist.

*Wintner.*

**Leray, Jean:** Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz; théorie des sillages et des pouses. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 2007—2008 (1935).

An accolade is an obstacle  $\widehat{B_0 C_0}$  formed from 2 concave arcs  $\widehat{B_1 A}$ ,  $\widehat{A C_1}$  and 2 convex arcs  $\widehat{B_0 B_1}$ ,  $\widehat{C_1 C_0}$  which when described from  $B_0$  towards  $B_1$  from  $C_0$  towards  $C_1$  have non increasing curvature, the point  $A$  can be angular. — A solution of the prow problem is always acceptable if the stream divides at  $A$ , the maximum value of the velocity does not occur along the obstacle and the curvature of the free lines increases as the points of detachment are approached. — The problem of the wake depends on the integro-differential equation of Villat. A case (that of symmetry) is noted in which the solution is unique. The case in which the obstacle is convex is also mentioned. — There are symmetrical convex obstacles for which the symmetrical problem of the prow has several solutions. When the obstacle is an accolade there is only one.

*H. Bateman* (Pasadena).

**Lukin, P. P.:** Über die Abhängigkeit der inneren Kräfte vom Hauptvirial der äußeren Kräfte. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 357—358 u. deutsch. Text 359—361 (1935) [Russisch].

Das Virial eines elastischen Körpers wird eingeführt durch den Ausdruck:

$$W = \iint \iint [X(x+u) + Y(y+v) + Z(z+w)] dx dy dz \\ + \iint [X_n(x+u) + Y_n(y+v) + Z_n(z+w)] dS,$$

der sich in bekannter Weise mittels des Greenschen Satzes und der statischen Grundgleichungen umformen läßt. Es werden einige Folgerungen aus der Tatsache gezogen, daß diese Umformungen unabhängig von dem speziellen Elastizitätsgesetz des Körpers sind.

*F. Noether* (Toms).

## Relativitätstheorie.

● **Uller, Karl:** Das Grundgesetz der Wellenfortpflanzung aus bewegter Quelle in bewegtem Mittel. Der Michelson-Versuch und die Raumzeitlehre von Einstein. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1935. 138 S. u. 21 Abb. RM. 5.—.

„... das vorliegende Buch entwickelt ... das bisher unbekannte, allgemeine Grundgesetz der Phasenwanderung aus bewegter Quelle in bewegtem Mittel. Dabei kommt an den Tag, daß man bisher den Grundzug dieser Ausbreitung verkannt hat, so daß die Schlüsse, die man aus diesbezüglichen Versuchen gezogen hat, teils hinfällig, teils nur eingeschränkt zulässig sind. Aus dem wahren Grundgesetz werden nabeliegende wellenkinematische und physikalische Folgerungen gezogen. Es verrät u. a., daß nur die Galileiwelt in der Natur verwirklicht ist. Es führt zur Erklärung des Fresneffektes der sog. Mitführung und des Bradleeffektes der Aberration. Es liefert in der Anwendung die wahre Theorie und Bedeutung des Michelsonversuches; derselbe kann bei ruhender Quelle gar nicht die gesuchte Äthertrift u liefern, sondern nur das Produkt  $fu$ , worin  $f$  der Fresneffaktor des reinen Äthers. Schließlich liefert es als Nebenprodukt eine Reihe strenger Beweise für die mathematische Unmöglichkeit der Relativitätstheorie von Einstein aus dem Jahre 1905, die nur auf Grund einer falschen Theorie des Michelsonversuches seiner Zeit das Licht der Welt hat erblicken können. Mit dieser, aber auch ohne diese, ist ferner auch die Elektrodynamik von Minkowski gefallen. Der Gegenbeweis sind viele. Sie alle haben aber eine gemeinsame Wurzel, nämlich die allgemeine Unkenntnis vom wahren Wesen der Welle ...“ — Die ersten 100 Seiten behandeln „das allgemeine Gesetz der Wellenausbreitung in gleichförmig bewegten homogenen und isotropen Mitteln bei bewegter Quelle“. Es folgen die Abschnitte: „Die Äthertrift und die wahre Bedeutung des Michelsonversuches“ sowie „Wellenkinematische Beweise gegen die Raumzeitlehre von Einstein“.

*Picht* (Berlin).

**Baumgardt, Ludwig:** Über die Beweiskraft des Jenaer Michelsonversuches. II. Ann. Physik, V. F. 23, 105—110 (1935).

Im Anschluß an eine vorhergehende Arbeit [Ann. Physik (5) 21, 573 (1934/35); dies. Zbl. 10, 322] wird erneut dargetan, daß die Resultate der Jenaer Wiederholung des Michelsonversuches durch Joos sich durch die Annahme einer realen Lorentzkontraktion in Verbindung mit der Elektronentheorie (Absoluttheorie des Äthers) nicht erklären lassen. Der Versuch scheint vielmehr eindeutig für die Richtigkeit der Interpretation der spez. Relativitätstheorie zu sprechen.

*Heckmann.*

**Sulaiman:** The mathematical theory of a new relativity. Proc. Acad. Sci., Allahabad 4, 1—36 (1934).

**Urbanek, Jean:** Forme et symétrie des équations électromagnétiques; équivalence de l'énergie et de la masse. C. R. Acad. Sci., Paris 200, 2067—2070 (1935).

Die willkürlich angenommene Dimensionsgleichheit von Masse und Energie führt nach der Relativitätstheorie zu der Bedingung  $[c] = 1$  oder dazu, daß Geschwindigkeit eine rein numerische Zahl sei, mit Lichtgeschwindigkeit als Bezugseinheit. Es folgt weiter, daß in der Maxwellschen Feldtheorie vollkommene Dimensionssymmetrie eintritt, indem elektrische Ladung und magnetische Menge, elektr. Feldstärke  $E$  und magn. Intensität  $H$ , dielektr. Verschiebung  $D$  und magn. Induktion  $B$ , gleiche Dimensionen annehmen; die Zahl der fundamentalen Dimensionen reduziert sich dabei auf zwei. (Dies ist derselbe Fehler, in anderer Form, den der Autor an den sog. „absoluten“ Dimensionssystemen der Elektrizitätslehre rügt.)

*E. Weber* (New York).

**Garcia, Godofredo:** Le problème ballistique dans la mécanique einsteinienne. Bull. Soc. Math. Grèce 16, Nr 1, 8—9 (1935).

**Diatechenko, V.:** Berechnung der Korrektur in der Knotenbewegung des Planets Venus nach der Relativitätstheorie. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 93—94 (1935) [Ukrainisch].

Auf Grund der angenähertesten Formeln nach der Relativitätstheorie von A. Einstein für Berechnung der Knotenbewegung des Planeten Venus sind Zahlenberechnungen durchgeführt worden. Die Korrektur in der Knotenbewegung erreicht ungefähr Null, nämlich weniger als  $8 \cdot 10^{-10}$  Radians aufs Jahrhundert. *Autoreferat.*



**Tolotti, C.: Equazioni gravitazionali di Einstein per gli universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 488—492 (1935).

**Tolotti, C.: Caso tipico di universi dinamici dotati di completa simmetria attorno ad un centro.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. 21, 572—575 (1935).

The author states that Tolman, in his recent work on cosmological models (this Zbl. 9, 41) applies to non-homogeneous models equations which belong to homogeneous models. He shows that an hypothesis upon which Tolman's work is based (namely that light is propagated isotropically relative to material systems of reference with a velocity which is independent of position) leads to the conclusion that the gravitational equations necessarily yield homogeneous models. To this end he considers a metric of the form  $ds^2 = V^2 dt^2 - H^2 dl^2$ , where  $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  and  $V, H$  are functions of  $t$  and the radius vector  $\varrho$  only. He takes  $dl^2$  in this form because a spherically symmetrical  $V_3$  is conformably representable on a Euclidean  $V_3$ ; so to take  $dl^2$  flat merely involves a modification of  $H$ . *H. S. Ruse (Edinburgh).*

**Hoffmann, B.: On the spherically symmetric field in relativity. II.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 179—183 (1933).

In the first paper under this title (this Zbl. 5, 270) the author showed that, on the basis of the field-equations of relativity with the cosmological constant equal to zero, the most general spherically symmetric field of gravitation and electromagnetism outside matter must be a static field so that no energy can be dissipated in the form of spherically symmetric waves in vacuo. In this paper he considers the case in which the field-equations contain the cosmological term, and reaches the same general conclusions. *H. S. Ruse (Edinburgh).*

**Hoffmann, B.: On the spherically symmetric field in relativity. III.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 6, 149—160 (1935).

The author discusses the same question (see the above abstract) on the basis of the Born-Infeld field-equations (this Zbl. 8, 422)

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + E_{ab} + \lambda g_{ab} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^b} \{(-g)^{\frac{1}{2}}(F^{ab} - GF^{*ab})/\Phi\} = 0,$$

where  $\Phi = (1 + F - G^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $-E_{ab} = g_{ab}(1 - \Phi - G^2/\Phi) + g^{cd}F_{ac}F_{bd}/\Phi$ ,

$$F = \frac{1}{2}F_{ab}F^{ab}, \quad F^{*ab} = \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}F_{cd} \quad (\epsilon^{abcd} = \pm 1/(-g)^{\frac{1}{2}}, 0),$$

$$G = \frac{1}{4}F_{ab}F^{*ab}, \quad F_{ab} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \varphi_b}{\partial x^a}.$$

He again concludes that the most general spherically symmetric field is static. In discussing this result, he remarks that the universe obtained on the basis of the ordinary relativity field-equations, being an "external" solution, would still be static if the matter producing it had any motion consistent with spherical symmetry; but since the Born-Infeld equations hold for all regions, whether occupied by matter or not, the spherically symmetric universe obtained from them must be completely static. Such a "frozen" distribution would not be exactly realized in nature. — Finally he considers the results derived from the modified Born-Infeld equations, namely those for which  $G = 0$ , and again obtains a static universe. Comparing this with the former solution, he concludes that, in a field containing isolated magnetic pole-strengths, there is reason for preferring the former set of Born-Infeld equations; but if the possibility of isolated magnetic pole-strengths is not admitted, the spherically symmetric solutions derived from both sets are the same. *H. S. Ruse (Edinburgh).*

**Tolman, Richard C.: Thermal equilibrium in a general gravitational field.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 321—326 (1935).

The conditions for thermal equilibrium in a static gravitational field

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + g_{44}(dx^4)^2, \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

( $g$ 's independent of  $x^4$ ) are known to be

$$\frac{\partial}{\partial x^4}(\log T_0) = -\frac{\partial}{\partial x^4}(\log \sqrt{g_{44}}), \quad \frac{\partial}{\partial x^4}(\log T_0) = 0,$$

where  $T_0$  is the proper temperature measured at different positions by local observers at rest in the medium [see Tolman, *Physic. Rev.* **35**, 904 (1930); Tolman and Ehrenfest, *ibid.* **36**, 1791 (1930)]. In the present paper the author shows that these are

expressible in the covariant form  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\log T_0) = (u_\mu)_\alpha u^\alpha$ , ( $\mu, \alpha = 1, \dots, 4$ ), where

$u^\alpha \equiv dx^\alpha/ds$  is the velocity 4-vector of the medium. In extending this result to any gravitational field he remarks that these equations are too restrictive for a non-static system, since they do not allow for local variations of temperature with respect to the time kept by the observer. He therefore proposes as the proper generalization of the conditions of thermal equilibrium to any gravitational field the set of equations

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\log T_0) = (u_\mu)_\alpha u^\alpha + u_\mu \frac{d}{ds}(\log T_0)$ . These agree with the original set for  $\mu = 1, 2, 3$ , but for  $\mu = 4$  yield the identity  $\frac{\partial}{\partial t}(\log T_0) = \frac{d}{ds}(\log T_0)$ , ( $t$  the observer's local time), instead of the equation  $\frac{\partial}{\partial t}(\log T_0) = 0$  which arises in the static case. *H. S. Ruse.*

## Quantentheorie.

**Einstein, A., B. Podolsky and N. Rosen:** Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physic. Rev.*, II. s. **47**, 777—780 (1935).

Gestützt auf eine a priori-Definition der „Wirklichkeit“ wird auf die Unvollständigkeit der quantentheoretischen Naturbeschreibung aus dem Umstand geschlossen, daß es in der Quantenmechanik möglich ist, ohne das in Frage stehende System zu stören, eine Wahl zu treffen, ob man die eine oder die andere von zwei nichtvertauschbaren Größen kennen will.

*O. Klein (Stockholm).*

**Born, Max:** Quantum electrodynamics. (*Cambridge*, 4. X. 1934.) *Internat. Conf. on Physics* **1**, 19—27 (1935).

Zusammenfassender Bericht über die Arbeiten von Born und Infeld.

*P. Jordan (Rostock).*

**Goldstein, L.:** Sur les champs électromagnétiques de la théorie des quanta. III. *J. Physique Radium*, VII. s. **6**, 209—214 (1935).

Die Arbeit enthält eine Diskussion der Meßbarkeit von statischen Feldern, wobei insbesondere die Frage berührt wird, wann die klassische Mechanik und wann die Quantenmechanik bei der Deutung von Feldmessungen mittels eines Probekörpers zu benutzen ist. (I., II. vgl. dies. Zbl. **10**, 228 u. 380.)

*O. Klein (Stockholm).*

**Ertel, Hans:** Über die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante. *Z. Physik* **95**, 775 bis 777 (1935).

In Anlehnung an Eddingtonsche Ideen und unter Heranziehung der Bornschen Theorie des Elektrons wird die Beziehung

$$\frac{h}{Mc} = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{137}{126} \cdot \frac{B(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{16}$$

zwischen Protonenmasse  $M$  und Elektronenmasse  $m$  aufgestellt, wobei  $B$  die Eulersche Betafunktion ist. Wird für  $\mu = M/m$  der durch die Eddingtonsche Gleichung  $10\mu^2 - 136\mu + 1 = 0$  gegebene Wert  $\mu = 1847,60$  benutzt, so ergibt sich die reziproke Feinstrukturkonstante  $\alpha^{-1} = 137,302$  in Übereinstimmung mit dem beobachteten Werte 137,298.

*P. Jordan (Rostock).*

**Basu, K.:** On the solution of a certain differential equation in wave-mechanics. *Indian Phys.-Math. J.* **6**, 9—13 (1935).

Es wird untersucht, ob die radiale Schrödingergleichung des Keplerproblems mit Polarisationsstörungsterm (d. h. entsprechend der potentiellen Energie  $V = \frac{Ze^2}{r} - \frac{\alpha e^2}{2r^4}$ )



strenge Lösungen hat. Der Verf. kommt u. a. zu dem Schluß, daß das Problem nur für bestimmte Werte des Polarisationsfaktors  $\alpha$  strenge Lösungen hat, wobei kein Quantendefekt folgt. *Waller* (Upsala).

**Brillouin, L.: Propagation des ondes en mécanique ondulatoire; exemple des ondes élastiques.** J. Physique Radium, VII. s. 6, 185—193 (1935).

Eine elastische Welle in einem Kristall ist insofern entartet, als die nach rechts und nach links laufenden Anteile gleiche Frequenz haben. Statt dessen kann man auch zwei stehende Wellen als Eigenschwingungen verwenden. Das mathematische Problem ist analog dem eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators. Die Analogie wird durchgeführt und die Form der Matrixelemente abgeleitet. Dabei lassen sich die Formeln ableiten, die in der Theorie der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von Metallen und Isolatoren üblicherweise als selbstverständlich vorausgesetzt werden. In einer Formel von Peierls (dies. Zbl. 5, 136) für die Wärmeleitung von Isolatoren wird ein Faktor 2 korrigiert. *R. Peierls* (Manchester).

**Brillouin, Léon: Les ondes physiques transversales en mécanique ondulatoire et l'oscillateur harmonique à quatre dimensions.** C. R. Acad. Sci., Paris 200, 1725—1728 (1935).

In einer früheren Arbeit des Verf. [J. Phys. 6, 185 (1935); vgl. vorst. Referat] hat ein mit der Ausbreitung der elastischen und elektromagnetischen Wellen zusammenhängendes wellenmechanisches Problem zur Betrachtung eines isotropen vierdimensionalen harmonischen Oszillators Anlaß gegeben. Da die Wellengleichung eines solchen Oszillators in verschiedenen Koordinaten separierbar ist, kann deren Lösung in verschiedener Form geschrieben werden. Verf. gibt unter anderem eine Form der Lösung, welche vierdimensionale Kugelfunktionen enthält. Diese Form hat den Vorzug, daß sie die Erhaltung des Drehmomentes zum Ausdruck bringt, welches mit der Polarisierung der Welle in Beziehung steht. *V. Fock* (Leningrad).

**Perrin, Francis, et Walter M. Elsasser: Théorie de la capture sélective des neutrons lents par certains noyaux.** J. Physique Radium, VII. s. 6, 194—202 (1935).

Die Arbeit bringt eine ausführliche Darstellung der von denselben Verff. früher (vgl. dies. Zbl. 11, 139) gegebenen Erklärung der abnorm großen Wahrscheinlichkeiten für die Einfangung von langsamen Neutronen durch gewisse Atomkerne. *O. Klein*.

● **Debye, P.: Kernphysik.** Leipzig: S. Hirzel 1935. 34 S. u. 7 Fig. RM. 1.60.

**Crawford, M. F., and Lawrence A. Wills: Hyperfine structure formulae for the configuration  $p^3s$ .** Physic. Rev., II. s. 48, 69—72 (1935).

Die Verff. berechnen die Aufspaltung der Hyperfeinstruktur für Multiplette, die aus der Elektronenkonfiguration  $p^3s$  entstehen, und zwar für beliebige Koppelungsverhältnisse. *R. de L. Kronig* (Groningen).

**Araki, Gentaro: Calculation of X-ray terms according to Heisenberg's theory on electron-holes.** Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 189—216 (1935).

Heisenberg hat (vgl. dies. Zbl. 2, 425) eine Theorie gegeben, nach der man die Termberechnung für nahezu abgeschlossene Elektronenschalen auf ein Problem von entsprechend viel „fehlenden“ Elektronen zurückführen kann. Verf. gibt eine Anwendung dieser Theorie auf die Termberechnung der Röntgenspektren. Für die Wechselwirkung der Elektronen untereinander wird der Breitische Ansatz verwendet. Die Formeln werden für den  $K$ -Term bis zu Gliedern mit  $\alpha^2$  einschließlich für sämtliche Atome numerisch ausgewertet, insbesondere die beiden ersten Abschirmungszahlen berechnet. Sie stimmen mäßig gut mit den beobachteten Werten überein. *Bechert*.

**Sandeman, Ian: The mathematical representation of the energy levels of the secondary spectrum of hydrogen. II.** Proc. Roy. Soc. Edinburgh 55, 49—61 (1935).

Die Darstellung der Potentialkurven für die verschiedenen Elektronenzustände des Wasserstoffmoleküls durch Reihenentwicklungen, wie sie vor allem von Dunham erörtert worden sind, wird untersucht. Die Koeffizienten werden aus der Lage der Schwingungsrotationsniveaus ermittelt. Es zeigt sich, daß im allgemeinen nur geringe  $l$ -Entkopplung auftritt. (Vgl. dies. Zbl. 11, 379.) *R. de L. Kronig* (Groningen).

**Minkowski, R., und H. Bruck: Die Intensitätsverteilung der im Molekularstrahl erzeugten Spektrallinien.** Z. Physik 95, 274—283 (1935).

Verff. behandeln die von einem Molekularstrahl, in dem sich angeregte Atome befinden, ausgestrahlten Spektrallinien. Durch die einheitliche Bewegungsrichtung der leuchtenden Atome wird die Dopplerbreite der Spektrallinien stark herabgesetzt. Es wird die Intensitätsverteilung der Linien bei einem durch zwei Blenden erzeugten Molekularstrahl als Funktion der Größe und Entfernung der Blenden berechnet. Eine Abschätzung ergibt, daß sich der Molekularstrahl zur Erzeugung scharfer Spektrallinien und auch zur Untersuchung der Anregungsfunktion durch Elektronenstoß sehr gut eignet.

*Weißkopf* (Zürich).

**Minkowski, R., und H. Bruck: Wahre und scheinbare Breite von Spektrallinien.** Z. Physik 95, 299—301 (1935).

Es wird die Zusammensetzung der wahren Breite einer Spektrallinie und des verbreiternden Effektes der Spektralapparate zur beobachteten Breite berechnet, und zwar sowohl für eine Linie mit Dopplerscher Intensitätsverteilung als auch für eine solche mit Dispersionsverteilung. Im letzteren Fall ist die scheinbare Halbwertsbreite die Summe aus der wahren und aus der durch den Apparat bewirkten Halbwertsbreite, im ersteren Fall ist der Zusammenhang etwas komplizierter.

*Weißkopf*.

**Dieke, G. H.: A class of perturbations of molecular levels.** Physic. Rev., II. s. 47, 870—876 (1935).

Es wird eine Übersicht über die verschiedenen Arten von Störungen der Rotationsschwingungsniveaus zweiatomiger Moleküle gegeben. Der Verlauf der Störung für den Fall, daß die einander störenden Elektronenzustände  $\Delta l = 1$  bzw.  $\Delta l = 0$  haben, wird eingehend besprochen.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Schiff, L. I., and L. H. Thomas: Quantum theory of metallic reflection.** Physic. Rev., II. s. 47, 860—869 (1935).

In der klassischen Theorie der metallischen Reflexion sind alle Feldstärken an der Oberfläche stetig, mit Ausnahme der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke. Wenn man statt der phänomenologischen Theorie die Wechselwirkung mit den Metallelektronen unter der Annahme behandelt, daß sie im Metall annähernd frei sind, ergeben sich praktisch die gleichen Werte aller Feldstärken, mit Ausnahme des Verlaufs der elektrischen Feldstärke nahe der Oberfläche, die dort starke Schwankungen hat. Der Wert dieser Feldstärke ist von ausschlaggebender Wichtigkeit für die Theorie des Photoeffekts, und die Berücksichtigung des genauen Verlaufs verbessert die Übereinstimmung zwischen theoretischem und experimentellem Verhalten des Photoeffekts beträchtlich. Die Frequenz, bei der das Maximum des selektiven Effekts liegt, sollte für verschiedene Metalle wie die  $5/9$ te Potenz der Elektronendichte variieren, was innerhalb der Meßgenauigkeit erfüllt ist.

*R. Peierls* (Manchester).

**Mueller, Hans: Theory of the photoelastic effect of cubic crystals.** Physic. Rev., II. s. 47, 947—957 (1935).

Berechnungen des Effekts für verschiedene Gittertypen unter Berücksichtigung der Anisotropie in der Lorentz-Lorenz-Kraft bei Deformation, der Anisotropie der Coulombkräfte zwischen den Ionen und der Polarisierbarkeit jedes einzelnen Ions infolge der Deformation seiner Umgebung. Die Resultate sind in befriedigender Übereinstimmung mit experimentellen Werten und erlauben, Werte für andere Kristalle voranzuberechnen. Fehler in den Rechnungen anderer Autoren werden korrigiert, dabei stellt sich u. a. heraus, daß die Born-Ewaldsche Methode und die Methode von Lorentz und Bragg zur Berechnung der Lorentz-Lorenz-Kraft zu den gleichen Resultaten führen.

*R. Peierls* (Manchester).

**Frenkel, J., and T. Kontorowa: The elementary theory of galvanomagnetic phenomena in crystals.** Physik. Z. Sowjetunion 7, 452—463 (1935).

Die Formeln von Nordheim und Blochinzew (vgl. dies. Zbl. 7, 191) für Hall-effekt und Widerstandsänderung in zweiwertigen Metallen werden mit einer ver-



einfachten Rechnung neu abgeleitet. Die Vereinfachung besteht darin, daß von Anfang an wesentlicher Gebrauch von der Annahme gemacht wird, daß die Häufigkeit der Zusammenstöße für ein Elektron richtungsunabhängig ist, obwohl seine Energie und Geschwindigkeit mit der Richtung stark variieren. (Diese Annahme entspricht vermutlich der Wirklichkeit nicht, und daher hat sowohl diese Vereinfachung wie auch die quantitativen Beziehungen von Nordheim und Blochin zu nur sehr formale Bedeutung. D. Ref.) *R. Peierls (Manchester).*

**Bethe, H. A.:** Statistical theory of superlattices. Proc. Roy. Soc. London A **150**, 552—575 (1935).

Untersuchung der Überstruktur in einem Mischkristall aus gleichen Anteilen von zwei Atomsorten in entweder einfach-kubischer oder raumzentrierter Anordnung nach dem Vorgang von Bragg-Williams [Proc. Roy. Soc. London A **145**, 699 (1934)]. Die schematischen Annahmen von Bragg und Williams über die Wechselwirkungskräfte werden durch die konkrete Annahme ersetzt, daß sich nur Nachbaratome beeinflussen. Unter dieser Annahme erhält man ein Problem, das zwar nicht streng lösbar ist, für das der Verf. jedoch mit Hilfe eines Kunstgriffs eine Lösung angibt, die eine gute Approximation darstellt. Sie kann als erste Näherung eines systematischen Verfahrens aufgefaßt werden; zur Kontrolle wird die zweite Näherung berechnet, die von der ersten sehr wenig abweicht. Die Resultate sind quantitativ sehr ähnlich zu denen von Bragg und Williams, der Hauptunterschied besteht darin, daß die anomale spezifische Wärme auch oberhalb der „kritischen Temperatur“ nicht völlig verschwindet. Der Grund liegt darin, daß über kleine Gebiete auch bei hohen Temperaturen noch eine geordnete Verteilung vorhanden ist und man im Mittel mehr „richtige“ als „falsche“ Paare von Nachbarn hat. *R. Peierls (Manchester).*

**Neugebauer, Th.:** Über die Elektronenleitung und die Gitterstabilität binärer Kristalle. Z. Physik **95**, 717—733 (1935).

Verf. berechnet die Polarisationsenergie der Ionen durch ihre Nachbarn in verschiedenen Kristallgittern (NaCl-, CsCl-, ZnS-, NiAs-Typ), indem er sich auf die zweite Ordnung des Störungsverfahrens beschränkt und eine Entwicklung nach Kugelfunktionen vornimmt. Die Polarisationsenergie ist am kleinsten für NaCl und CsCl, dann folgt ZnS, weiterhin NiAs, schließlich die eigentlichen Molekül- und Schichtengitter. Die Zunahme der Polarisationsenergie wird in Zusammenhang gebracht mit der Zunahme der Elektronenleitfähigkeit von NaCl bis NiAs. Ferner will Verf. die Tatsache, daß z. B. in der Reihe CuBr, ZnS, GaAs, GeGe, für welche Stoffe die Summe der Kernladungen konstant ist, die Gitterkonstante nur wenig variiert, auf die große Polarisationsenergie zurückführen (Isosterismus). *R. de L. Kronig (Groningen).*

**Ott, H.:** Der Einfluß der Temperatur auf die Röntgenstreuung fester Körper nach der Quantenmechanik. Ann. Physik, V. F. **23**, 169—196 (1935).

Der Verf. gibt eine Behandlung des im Titel genannten Problems, wobei gewisse Annäherungen betreffs Summation und Integration der Streumatrizen, welche in früheren Behandlungen des Problems gemacht wurden, vermieden werden und durch strenge Berechnungen ersetzt werden. Die Abweichungen von den früheren angenäherten Berechnungen sind aber gemäß dem Verf. „wohl in fast allen praktischen Fällen außerhalb des realisierbaren Temperaturgebiets bzw. außerhalb des Beobachtungsbereichs der Interferenzen“. *Waller (Upsala).*

**Feynberg, Eugene:** Neutron-proton interaction. I. The binding energies of the hydrogen and helium isotopes. Physic. Rev., II. s. **47**, 850—856 (1935).

Für die Wechselwirkung eines Protons und eines Neutrons in demselben Kern wird eine Potentialfunktion  $J(r) = Ae^{-\alpha r}$  angenommen.  $A$  und  $\alpha$  werden aus der Bindungsenergie von  $\text{He}^4$  und  $\text{H}^2$  berechnet. Es folgt ungefähr  $A = 170 \text{ mc}^2$  (in Elektronenmasse) und  $1/\alpha = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ , sowohl nach der Theorie von Wigner wie nach der von Majorana. Daraus wird die Bindungsenergie von  $\text{H}^3$  zu  $12,7 \text{ mc}^2$



(Wigner) und  $11,2 \text{ mc}^2$  (Majorana) berechnet, was in Anbetracht der gemachten Näherungen nicht weit abweicht von dem experimentellen Wert  $16 \text{ mc}^2$ . *Waller.*

**Feenberg, Eugene: Neutron-proton interaction. II. The scattering of neutrons by protons.** *Physic. Rev., II. s. 47, 857—859 (1935).*

Die Streuung von Neutronen durch Protonen wird unter Annahme eines Wechselwirkungspotentials  $J_1(r)$  berechnet, wobei aber, wegen der verschiedenen Art der Wechselwirkung,  $J_1(r)$  nicht als identisch mit  $J(r)$  (s. vorsteh. Ref.) angenommen wird. Durch Betrachtung der Abhängigkeit des Streuquerschnitts von kinetischer

Energie wird der Verf. zu der Annahme  $J_1(r, v) = \widehat{J}(r) e^{-g(\beta_0 + \frac{v}{c})}$  geführt, wobei  $g$  eine positive Konstante ist,  $v$  die Relativgeschwindigkeit der stoßenden Partikel und  $\beta_0 c$  mit der mittleren Relativgeschwindigkeit der Partikel in  $\text{H}^2$  identifiziert wird. *Waller.*

**Lennard-Jones, J. E., and C. Strachan: The interaction of atoms and molecules with solid surfaces. I. The activation of adsorbed atoms to higher vibrational states.** *Proc. Roy. Soc. London A 150, 442—455 (1935).*

Die Verff. untersuchen das Verhalten eines an der Oberfläche eines Festkörpers adsorbierten Atoms (oder Moleküls) nach der Wellenmechanik. Es wird angenommen, daß das Atom durch ein Potentialfeld von Morse gebunden ist, und die Wahrscheinlichkeit für Anregung (durch die Wärmeschwingungen des Festkörpers) vom Zustand niedrigster Schwingungsenergie zu höheren Zuständen wird berechnet. Dabei werden nur Schwingungen des adsorbierten Atoms senkrecht zur Oberfläche des Festkörpers betrachtet. Daraus wird berechnet die mittlere Lebensdauer der angeregten Zustände des Atoms, die sich als einige Schwingungsperioden herausstellt (in einem speziellen Beispiel der Ordnung  $10^{-12}$  sec). Die Ergebnisse werden auf das Problem der „Wanderung“ adsorbierter Atome entlang der Oberfläche des Festkörpers angewendet.

*Waller (Upsala).*

**Strachan, C.: The interaction of atoms and molecules with solid surfaces. II. The evaporation of adsorbed atoms.** *Proc. Roy. Soc. London A 150, 456—464 (1935).*

Die Ergebnisse der vorigen Arbeit (vgl. vorsteh. Ref.) werden erweitert, indem die Wahrscheinlichkeit der Übergänge von Zuständen mit diskreter Energie des adsorbierten Atoms (oder Moleküls) zu den Zuständen kontinuierlicher Energie berechnet wird. Daraus wird dann durch Summation die Wahrscheinlichkeit für Verdampfen des adsorbierten Atoms von der Oberfläche des Festkörpers berechnet. Die theoretische Formel wird angewendet auf die Verdampfung von  $\text{H}_2$ , HD und  $\text{D}_2$  von einem Metall, und es wird gefunden, daß in großem Temperaturgebiet (etwa  $30\text{—}300^\circ \text{K}$ ) die mittlere Verweilzeit von HD bzw.  $\text{D}_2$  an Kupfer vier- bis sechs- bzw. zwanzigmal größer ist als diejenige von  $\text{H}_2$ .

*Waller (Upsala).*

## Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

● **Debye, P.: Les températures voisines du zéro absolu. (I. Conf., Univ. Liège, 23. X. 1934.)** Liège: Édit. E. D. K. 1934. 27 pag. et 9 fig.

**Krbek, F. v.: Anfangsgründe der Thermodynamik.** *Z. Physik 94, 204—210 (1935).*  
A repetition of well known formulae and reasonings. *O. Halpern (New York).*

● **Tourriol, J.-B.: Chaleur. (Cours de physique. Classes de math. spéc.)** Paris: Gauthier-Villars 1935. 304 pag. et 128 fig. Frs. 35.—

This textbook seems to be particularly adapted to the arrangement of courses in French universities and therefore can be hardly judged in fairness from the point of view of a general reader. Thermodynamics (first and second law) is a prerequisite to it; on the other hand, it avoids the use of elementary calculus and almost everywhere the application of the fundamental laws of thermodynamics. — Apart from the presentation as characterised above the book must be recommended as rich in content, for the clearness with which it reports even on more complicated questions in an elementary manner and for the list of useful though elementary problems in the appendix.

*O. Halpern (New York).*



**Ehrenfest-Alanassjewa, T., und G. L. de Haas-Lorentz:** Über Intensitätsparameter und über stabiles thermodynamisches Gleichgewicht. *Physica* 2, 743—752 (1935).

Für die Anwendung des Prinzips von Le Chatelier-Braun ist eine Einteilung der möglichen Zustandsparameter in „Intensitäts“- und „Quantitätsgrößen“ erforderlich. Eine scharfe Definition für die Unterscheidung dieser beiden Gruppen fehlt jedoch bisher. In Fortführung eines Gedankens von Planck (vgl. dies. Zbl. 8, 427) schlagen Verff. eine Definition für den Begriff „Intensitätsparameter“ vor, welche sich auf die Bedingung des stabilen Gleichgewichts stützt. Sie leiten auch ab, daß sich das System nur dann im stabilen Gleichgewicht befindet, wenn der Differentialquotient dieser Art von Parametern nach den zugehörigen Variablen positiv ist.

*H. Ulich (Aachen).*

**Laue, M. v.:** Der Einfluß eines Magnetfeldes auf Wärmeleitung und Reibung in paramagnetischen Gasen. *Ann. Physik*, V. F. 23, 1—15 (1935).

Die von Senftleben aufgefunden Verminderung der Wärmeleitfähigkeit paramagnetischer Gase im Magnetfeld und die entsprechende von Engelhardt und Sack nachgewiesene Änderung der inneren Reibung haben bisher noch keine irgendwie befriedigende theoretische Deutung gefunden. Der Verf. entwickelt, ohne die eigentliche molekularkinetische Ursache der Erscheinungen aufklären zu wollen, einige theoretische Aussagen über die beiden Effekte. — I. Symmetriebetrachtungen. Ein Gas im homogenen Magnetfeld besitzt hinsichtlich aller Eigenschaften, die das Magnetfeld beeinflußt, dessen Anisotropie. Der Tensor 2. Grades, der bei der Wärmeleitung den linearen Zusammenhang zwischen Wärmestrom und Temperaturgefälle vermittelt, ist also im vorliegenden Fall den für das Magnetfeld geltenden Symmetriebedingungen zu unterwerfen. So ergeben sich über die Abhängigkeit der Wärmeleitung von dem Winkel zwischen Magnetfeld und Temperaturgefälle Aussagen, die sich in den Messungen bestätigen. Die innere Reibung ist zu kennzeichnen durch einen Tensor 4. Ranges; auch hier wird ein Richtungseinfluß (Strömungsrichtung gegenüber Magnetfeld) abgeleitet. — II. und III. Unter Einführung der Annahme, daß die mittlere freie Weglänge im Magnetfeld abhängig wird von der Flugrichtung gegenüber dem Feld, wird die kinetische Theorie der Wärmeleitung in der von Sommerfeld gegebenen Form durchgeführt und die entsprechende Theorie der Reibung angesetzt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich zwanglos das auffallende Ergebnis der Messungen, daß die innere Reibung eine andere Abhängigkeit von Magnetfeld, Dichte und Temperatur zeigt als die Wärmeleitung, daß also kein einfacher Zusammenhang zwischen der magnetischen Beeinflussung beider Erscheinungen besteht. *E. Vogt (Marburg, Lahn).*

**Krutkow, G.:** Bemerkung über die Gibbschen „grands ensembles“ und die Methode von Darwin und Fowler. *C. R. Acad. Sci. URSS* 2, 201—204 u. deutsch. Text 203—204 (1935) [Russisch].

An einem speziellen Beispiel, nämlich dem des statistischen Gleichgewichtes in einem gasförmigen, aus zwei Atomsorten bestehenden System, wird gezeigt, daß aus der Formel, welche die Gesamtzahl der bei vorgegebener Energie möglichen Komplexe angibt, mit Hilfe der Methode von Darwin und Fowler sogleich der Gibbs'sche Ansatz für das „grand ensemble“ für den betreffenden Fall hergeleitet werden kann.

*Fürth (Prag).*

**Kirkwood, John G.:** Statistical mechanics of fluid mixtures. *J. chem. Phys.* 3, 300—313 (1935).

The thermodynamic properties of a system of interacting particles are determined by the average potential energy of all the possible pairs of particles. Expressions for these average potential energies are rigorously derived from Gibbs' phase integral in form of integral equations which can not in general be solved. The expressions are applied to the treatment of non-ideal gases and electrolytes. The author claims to have devised a consistent method of approximation which for both cases leads to physically correct results.

*O. Halpern (New York).*



Syrkin, J. K.: Über die Kinetik der bimolekularen Reaktionen in Lösung. *Acta physicochim. (Moskva)* **1**, 855—870 (1935).

A theory of the velocity of bimolecular reactions in solutions is presented in which the difference of the type of collision between molecules when present in gases or solutions is fully discussed. Kinetic considerations (extensions of the theory of Brownian movement) lead to the result that essentially two different expressions for the "number of activated collisions" have to be discussed. This classification depends upon the questions whether the activated molecule reacts at the first collision or whether there exists a (comparatively small) probability of reaction at every collision. The two cases are distinguished by their dependance on the temperature and on other physical parameters.

O. Halpern (New York).

Finkelstein, B. N.: The virial theorem and the theory of strong electrolytes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31**, 281—284 (1935).

The author discusses in the most comprehensive manner the general thermodynamical and statistical relations which hold in the theory of dilute electrolytic solutions. It is shown that the ratio of electrical energy and free energy can be written in the form

$$\frac{E}{F} = \frac{\omega(\lambda_i)}{\varphi(\lambda_i)}$$

where  $\omega$  and  $\varphi$  denote arbitrary functions of the  $N$  arguments  $\lambda_i = \frac{e_i^2}{kTV^{1/3}}$  the other symbols having their customary meaning. From this relation the virial theorem and other interesting dimensional relations can be derived directly.

O. Halpern.

Allard, Georges: Mécanique statistique et équilibre du rayonnement et de la matière. *C. R. Acad. Sci., Paris* **201**, 39—41 (1935).

Durch die Anwendung der Zellstatistik läßt sich das Verteilungsgesetz der Energie herleiten, d. h. die Anzahl  $n_i$  der Systeme einer Gesamtheit, deren Energie gleich  $E_i$  ist, finden, wenn die Wahrscheinlichkeit a priori  $\omega_k$  dafür bekannt ist, daß eine Zelle im Phasenraum  $k$  Phasenpunkte enthält. Um das Gesetz der schwarzen Strahlung in einem mit Materie erfüllten Raume zu gewinnen, muß man das Verteilungsgesetz

$n_i = \frac{a g_i}{e^{\gamma + \beta E_i} - 1}$  zugrunde legen, worin  $a > 1$  ist. Um dieses Gesetz zu erhalten, muß für  $\omega_k$  der folgende Ansatz benützt werden:  $\omega_k = A \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)}{k!}$ ,

welcher erkennen läßt, daß  $\omega_k$  mit zunehmendem  $k$  unbegrenzt anwächst. Da diese Schlußfolgerung offensichtlich widersinnig ist, folgt, daß es nicht möglich ist, das Problem des Gleichgewichts zwischen Strahlung und Materie auf Grund dieser theoretischen Vorstellung zu verstehen.

Fürth (Prag).

Ornstein, L. S.: Mean values of the electric force in a random distribution of charges. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **38**, 491—494 (1935).

Ist ein Atom vom Radius  $a$  von Ionen der Ladung  $e$  umgeben, deren Anzahl pro Volumeinheit gleich  $\rho$  sei, dann ist der Mittelwert der  $x$ -Komponente der Feldstärke  $\bar{X}$  an der Stelle des Mittelpunktes des Atoms gleich Null und ebenso verschwinden die Mittelwerte aller ungeraden Potenzen von  $X$ . Infolge der Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Ionen sind jedoch die geraden Potenzen von  $X$  im Mittel von Null verschieden. Unterliegen die Abweichungen von der gleichmäßigen Verteilung dem Gaußschen Gesetz und besteht zwischen den Abweichungen an verschiedenen Stellen keine Korrelation, dann ergibt sich  $\bar{X}^2 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2 \rho}{a}$  und  $\bar{X}^{2p} = 1 \cdot 3 \cdots (2p-1) \cdot \bar{X}^2{}^p$ . Der quadratische Mittelwert der Feldstärke selbst ist gleich  $3\bar{X}^2$ . Analoge Formeln kann man auch für den Fall ableiten, daß an Stelle der Ionen Dipole von bestimmtem Moment vorhanden sind. Schließlich wird auch noch der Fall behandelt, wo zwischen den Dichteabweichungen in verschiedenen Volumenelementen Korrelation besteht.

Fürth (Prag).